Derivaatta ja sen osaaminen matematiikan ylioppilaskirjoituksissa

Miten derivaatta määritellään ja miten sitä osataan ylioppilaskirjoituksissa lyhyessä ja pitkässä matematiikassa?

Helsingin yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Maisterintutkielma
Matematiikka
Viivi Tiihonen
Kevät 2021

Ohjaaja: Anne-Maria Ernvall-Hytönen

TiedekuntaFakultet/Faculty
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta

Tekijä/Författare/Author
Viivi Tiihonen

Työn nimi/Arbetets titel/Title
Derivaatta ja sen osaaminen matematiikan ylioppilaskirjoituksissa

Työn laji/Arbetets art/Level
Maisterintutkielma

Aika/Datum/Month and year
Huhtikuu 2021

Sivumäärä/Sidoantal/Number of pages
75

Tiivistelmä/Referat/Abstract
Tämä maisterintutkielma pyrkii havainnollistamaan lukion lyhyen ja pitkän matematiikan opiskelijoiden osaamista valtakunnallisissa ylioppilaskirjoituksissa. Aiheeseen paneudutaan analyysitason funktion derivaatan määrittelyn kautta ja lisäksi sivutaan lyhyesti lukion opetussuunnitelman perusteita vuosilta 2015 ja 2019. Tarkastelun myötä huomataan, että lukion lyhyen matematiikan derivaattakurssin funktion derivaatan määritelmä jää melko kauas tarkasta määritelmästä, kun taas pitkässä matematiikassa päästään hyvin lähelle todellisuutta. Lukiossa saadun opetuksen havainnollistamiseksi tehdään lyhyt oppikirjatarkastelu sekä lyhyen että pitkän matematiikan oppikirjoista.

Tutkielmassa käydään laajasti ja perustavanlaatuisesti läpi viimeisen viiden vuoden matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattaan painottuvat tehtävät. Tehtäviä analysoidaan niin määrällisesti kuin laadullisestikin sekä lyhyen että pitkän matematiikan osalta. Tutkimus osoittaa, että derivaattatehtäviä on ollut lyhyen matematiikan ylioppilaskokeissa parhaimmillaan kolme kappaletta, kun taas pitkässä matematiikassa suurin derivaattatehtäväesiintyvyys nousee jopa kuuteen tehtävään per koe. Lyhyen matematiikan kokeissa ei abstrakteiksi luokiteltavia tehtäviä ole ollut laisinkaan, pitkässä matematiikassa niitä on ollut muutamia. Kaikissa matematiikan ylioppilaskokeissa derivaattapainotteiset tehtävät ovat olleet hyvin pitkälti soveltaviksi luokiteltavia.

Ylioppilaskokelaiden osaamista tutkitaan Ylioppilastutkintolautakunnan laatimien pisteytysohjeiden avulla. Analyysissä huomataan, että yksittäisten derivaattatehtäviksi luokiteltujen derivaattaosuuksista saatavat suurimmat pistemäärät ovat noin kolmasosan luokkaa sekä lyhyen että pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa. Pisteytysohjeiden mukaista tehtäväanalyysiä tehdään tutkielmassa yksityiskohtaisesti.

Tutkielman suurin painoarvo on derivaattatehtävien pistejakaumissa ja niiden analysoinnissa. Työssä tutkitaan tehtävistä saatuja pistemääriä tehtävien tyypin, laadun ja vaikeusasteiden mukaan. Tutkimus osoittaa, että lyhyessä matematiikalla osataan sekä parhaiten että huonoiten funktion derivointia sekä sen arvon laskemista tietyssä pisteessä. Perustehtävistä saatiin enemmän pisteitä kuin soveltavista tehtävistä ja helppoja tehtäviä osattiin selkeästi paremmin kuin vaikeusasteeltaan haastavampia tehtäviä. Kuitenkin lyhyen matematiikan opiskelijat valitsivat kokeissa eniten soveltavia tehtäviä sekä vaikeusasteeltaan abstrakteja tehtäviä. Pitkän matematiikan kirjoittaneet taas osaavat parhaiten perinteistä funktion derivointia ja huonoiten funktion derivoituvuuden tarkasteluun liittyviä sovelluksia. Tehtävien laatu- ja vaikeusasteluokittelussa hajontaa esiintyi jonkin verran. Tutkimus osoittaa, että pitkän matematiikan opiskelijat valitsevat ylioppilaskokeissa mieluiten ääriarvotehtäviä ja vähemmälle suosiolle jäävät derivoituvuuden tutkimiseen painottuvat tehtävät.

Avainsanat/Nyckelord/Keywords
funktion raja-arvo, funktion jatkuvuus, funktion derivaatta, LOPS, ylioppilaskokeet, derivaattatehtävä, pistejakauma

Sisältö

1 Johdanto

Funktion derivaatta on lukiosta tuttu käsite, jonka tarkka määritelmä jää usein lukio-opetuksessa opiskelijoiden ymmärryksen ulkopuolelle. Erot lyhyen ja pitkän matematiikan opetuksessa näkyvät juuri tältä osin sekä lukion opetussuunnitelman perusteissa että oppikirjoissa.

Lukion oppimäärä kulminoituu valtakunnallisiin ylioppilaskirjoituksiin, joissa testataan opiskelijoiden osaamista aineittain. Matematiikan ylioppilaskokeissa testattavat osa-alueet vaihtelevat kokeittain ja kokeiden tehtävätyyppipainotuksia onkin tarpeen tutkia. Erityisesti funktion derivaatta on usein lukiolaisille haastava kulmakivi, jota kuitenkin testataan lyhyen ja pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa muutamia poikkeuksia lukuunottamatta vuosittain.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan, millaisia derivaattaan painottuvia tehtäviä kevään 2015 ja kevään 2020 väliin sijoittuviin ylioppilaskokeisiin on valikoitunut. Mielenkiintoista on tutkia myös sitä, kuinka paljon painoarvoa derivaattatehtävät kokeissa saavat ja millaisia vaikeusasteita tehtävät edustavat. Erityisen aseman tutkielmassa saavat matematiikan ylioppilaskokeiden pistejakaumat sekä tehtävävalinnat, sillä ylioppilaskokeisiin osallistuneiden opiskelijoiden saamat pisteet sekä kokelaiden valitsemat tehtävät antavat puhdasta dataa opiskelijoiden osaamisesta sekä opiskelijoiden kokemasta derivaattatehtävien mielekkyydestä. Vaikka ylioppilastutkinnon saadakseen ei matematiikkaa ole ylioppilaskokeissa pakko kirjoittaa, on lyhyen tai pitkän matematiikan kirjoittaneiden määrä valtakunnallisesti suuri. Tutkielmassa analysoidut aineistot edustavat siis pitkälti viimeisen viiden vuoden aikana ylioppilastutkinnon saaneiden derivaatan hallintaa sekä osaamista ja antavat tärkeitä tuloksia muun muassa lukiomatematiikan opetuksen kehittämiseen funktion derivaatan osalta.

2 Derivaatan tarkka määritelmä

Analyysi on matematiikan osa-alue, joka käsittelee reaalilukuja, kompleksilukuja sekä niiden funktioita; esimerkiksi differentiaalilaskentaa. Lukiossa tutuksi tullut differentiaalilaskenta käyttää analyysin tuloksia, mutta Harjulehdon, Klénin ja Koskenojan Analyysiä reaaliluvuilla -oppikirjan mukaan tulokset jäävät laskusääntöjen tasolle vailla täsmällistä perustelua. Siksi onkin tarpeen käsitellä näiden tuloksien takana olevaa perusteellista teoriaa ennen lukion opetuksen ja ylioppilaskokeiden tarkastelua. Tämän luvun teoriakatsaus perustuu pitkälti edellä mainitun oppikirjan teksteihin.

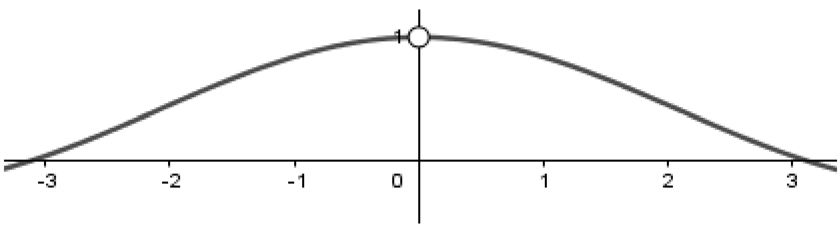
Funktion derivaatta pisteessä x_0 määritellään raja-arvon olemassaolon kautta. On siis tunnettava ensin funktion raja-arvon määritelmä, jota voidaan käyttää apuna funktion derivaatan määrittelemisessä. Funktion derivaattaa määritettäessä on tarpeen käsitellä myös funktion jatkuvuutta, mikä on edellytys derivoituvuudelle. Määritellään siis funktion raja-arvo, jatkuvuus sekä derivaatta perusteellisesti havainnollistavia kuvia ja esimerkkejä apuna käyttäen.

2.1 Funktion raja-arvo

Funktion raja-arvon avulla voidaan tutkia funktion käyttäytymistä jonkin tietyn pisteen lähellä. Tarkastellaan esimerkiksi funktiota $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Vaikka funktio ei ole määritelty kohdassa $x = 0$ voidaan tutkia, miten funktio käyttäytyy pisteen lähellä.



Kuva 2.1. Funktion $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ *kuvaaja.*

Kuvan 2.1 perusteella näyttäisi siltä, että funktion arvot kohdan $x = 0$ ympäristössä näyttäisivät olevan lähellä arvoa 1 eli $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Tämä johtopäätös voidaan funktion tarkkaa raja-arvon määritelmää apuna käyttäen todistaa oikeaksi. Määritellään ensin yleisesti funktion raja-arvo.

2.1.1 Funktion raja-arvon määritelmä

Olkoot $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ ja $x_0 \in \mathbb{R}$. Oletetaan, että on olemassa sellainen $r > 0$, että $(x_0 - r,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0 + r) \subset A$. Tällöin funktiolla f on pisteessä x_0 *raja-arvo* $m \in \mathbb{R}$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

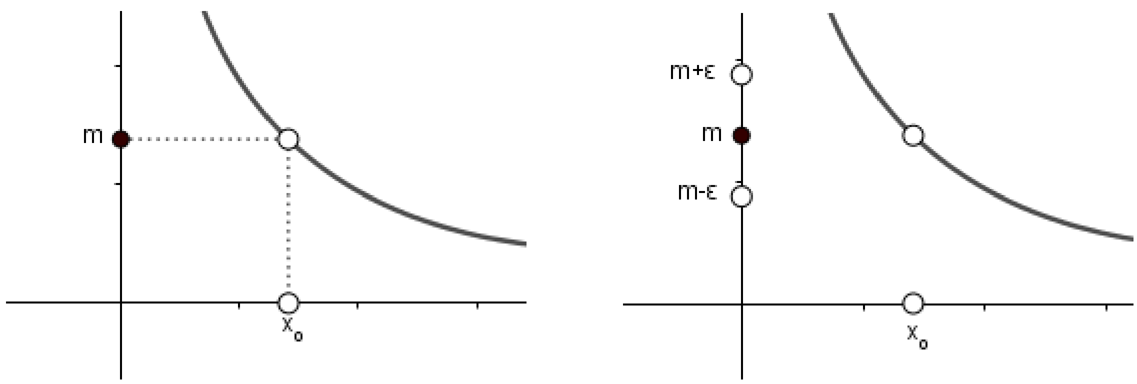
$$|f(x) - m| < \varepsilon$$

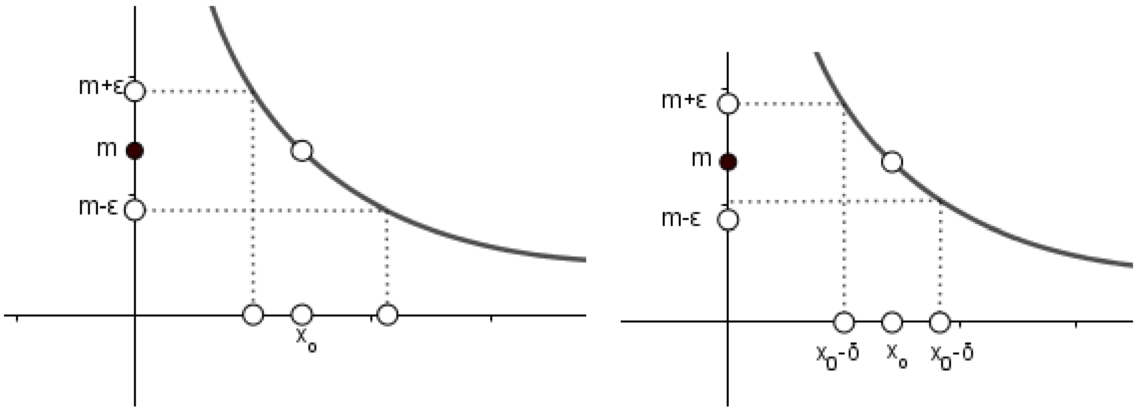
kun $0 < |x - x_0| < \delta$. Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = m \text{ tai } f(x) \to m, \text{ kun } x \to x_0.$$

2.1.2 Funktion raja-arvo käytännössä

Määritelmässä käytetään oletusta, että $(x_0 - r,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0 + r) \subset A$ jollakin $r > 0$. Tämä tarkoittaa sitä, että on olemassa pieneksi oletettava r, johon asti kaikki luvun x_0 lähellä olevat luvut kuuluvat joukkoon A, vaikka itse x_0 ei välttämättä kuuluisikaan kyseiseen joukkoon. Tällöin päästään lähestymään lukua x_0 molemmilta puolilta. Funktion raja-arvo on visualisoitu alla olevassa kuvassa 2.2.



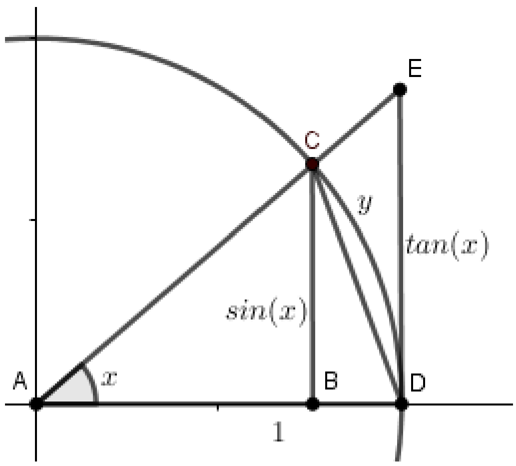


Kuva 2.2. Funktio $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: |f(x) - m| < \varepsilon$, *kun* $0 < |x - x_0| < \delta$.

Tarkastellaan vielä luvussa 2.1 käsiteltyä funktiota $f: \mathbb{R}\backslash\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{sin\, x}{x},$$

johon liittyen uumoilimme funktion arvojen olevan lähellä lukua 1, kun tarkastellaan funktiota kohdassa $x = 0$. Todistetaan johtopäätös oikeaksi eli osoitetaan, että $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. Alla oleva kuva 2.3 havainnollistaa todistusta.



Kuva 2.3. Geometrinen esitys trigonometrisistä funktioista yksikköympyrässä.

Alueen ACD pinta-alaksi saadaan

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot sin(x) = \frac{sin(x)}{2}.$$

Alueen ACD, johon lisätään janan CD ja ympyrän kaaren y väliin jäävä segmentti, pinta-alaksi saadaan

$$\frac{x}{2\pi} \cdot \pi = \frac{x}{2}.$$

Alueen AED pinta-alaksi saadaan

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot tan(x) = \frac{tan(x)}{2}.$$

Nyt nähdään, että

$$\frac{sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{tan(x)}{2} \Leftrightarrow sin(x) \leq x \leq tan(x) \Leftrightarrow sin(x) \leq x \leq \frac{sin(x)}{cos(x)}.$$

Jatketaan edelleen

$$\frac{sin(x)}{sin(x)} \leq \frac{x}{sin(x)} \leq \frac{sin(x)}{cos(x)} \cdot \frac{1}{sin(x)} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{sin(x)} \leq \frac{1}{cos(x)} \Leftrightarrow 1 \geq \frac{sin(x)}{x} \geq cos(x).$$

Nyt saadaan

$$\lim_{x \to 0} 1 \geq \lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} \geq \lim_{x \to 0} cos(x)$$

ja edelleen

$$1 \geq \lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} \geq 1.$$

Siis on oltava

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1.$$

$\square$

2.1.3 Funktion toispuoleisten raja-arvojen määritelmä

Olkoot $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ ja $x_0 \in \mathbb{R}$. Oletetaan, että on olemassa sellainen $r > 0$, että $(x_0 - r,\ x_0) \subset A$. Tällöin funktiolla f on pisteessä x_0 *vasemmanpuoleinen raja-arvo m*, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - m| < \varepsilon$$

kaikilla $x \in A$, joilla $x_0 - \delta < x < x_0$. Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = m \text{ tai } f(x) \to m, \text{ kun } x \to x_0^-.$$

Oletetaan, että on olemassa sellainen $r > 0$, että $(x_0, x_0 + r) \subset A$. Tällöin funktiolla f on pisteessä x_0 *oikeanpuoleinen raja-arvo m*, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - m| < \varepsilon$$

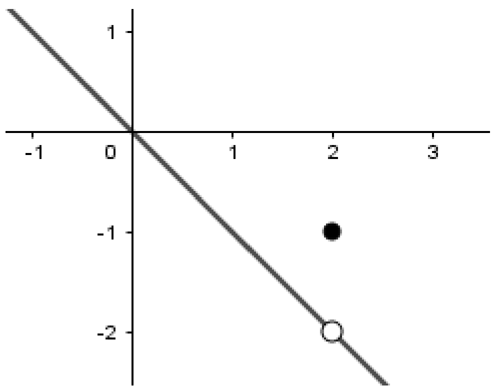
kaikilla $x \in A$, joilla $x_0 < x < x_0 + \delta$. Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = m \text{ tai } f(x) \to m, \text{ kun } x \to x_0^+.$$

2.2 Funktion jatkuvuus

Funktion jatkuvuutta määrittää sen derivoituvuus. Tarkastellaan funktiota $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) =- x,\ kun\, x \neq 2, f(x) = 1,\ kun\, x = 2$$



Kuva 2.4. Funktion f kuvaaja.

Funktiolla f on raja-arvo jokaisessa pisteessä, mutta kun tarkastellaan kohtaa $x = 2$, joudutaan hankaluuksiin, sillä

$$\lim_{x \to 2} f(x) =- 2 \neq - 1 = f(2).$$

Huomataan, että funktion raja-arvo pisteessä $x = 2$ ei ole sama kuin funktion arvo samaisessa pisteessä. Tällöin sanotaan, että funktio ei ole jatkuva pisteessä $x = 2$. Näin ollen funktiolle ei ole olemassa derivaattaa pisteessä $x = 2$.

2.2.1 Funktion jatkuvuuden määritelmä

Olkoot $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ ja $x_0 \in A$ sellainen, että $(x_0 - r,\ x_0 + r) \subset A$ jollakin $r > 0$. Funktio f on *jatkuva pisteessä* x_o, jos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Toisin muotoiltuna funktio f on jatkuva pisteessä x_0, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

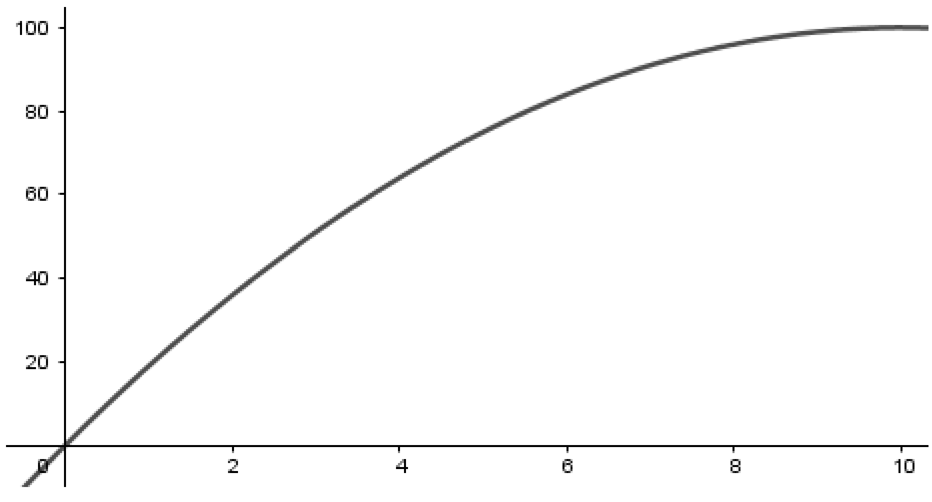
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

kun $|x - x_0| < \delta$.

Määritelmään sisältyy oletus, että funktiolla on pisteessä raja-arvo, joka on reaaliluku ja että raja-arvon suuruus on sama kuin funktion arvo tässä pisteessä.

2.3 Funktion derivaatta

Funktion derivaatta kuvaa funktion hetkellistä muutosnopeutta jossakin pisteessä. Tarkastellaan esimerkiksi todellisuutta approksimoivaa funktiota d: $[0: 9,58] \to \mathbb{R}$, $d(t) =- t^2 + 20t$. Funktio kuvaa tilannetta, jossa Usain Bolt juoksi vuonna 2009 maailmanennätyksen sadan metrin matkalla ajassa 9,58 sekuntia. Muuttuja t kuvaa juoksumatkaan kuluvaa aikaa sekunteina ja funktio d Boltin juoksemaa matkaa metreinä.



Kuva 2.5. Usain Bolt juoksee 100m ajassa 9,58s: x-akselilla on aika sekunteina ja y-akselilla juostu matka metreinä.

Boltin keskinopeus koko sadan metrin aikana aikana eli välillä $0 \leq t \leq 9,58$ on tuttuun tapaan $\frac{d(9,58)-d(0)}{9,58-0}\frac{m}{s} = 10,42\frac{m}{s}$. Juoksijan keskinopeus aikavälillä $2 \leq t \leq 3$ taas on $\frac{d(3)-d(2)}{3-2}\frac{m}{s} = 15\frac{m}{s}$. Boltin hetkellisen nopeuden laskemiseen esimerkiksi hetkellä $t = 3$ tulee tarkastella keskinopeutta välillä $3 \leq t \leq 3 + h$, missä $0 < h \leq 1$. Siis keskinopeus välillä $3 \leq t \leq 3 + h$ on

$$\frac{d(3+h)-d(3)}{(3+h)-3}\frac{m}{s} = \frac{-(3+h)^2+20\cdot(3+h)+3^2-20\cdot 3}{h}\frac{m}{s} = (14 - h)\frac{m}{s}.$$

Hetkellinen nopeus saadaan laskettua pienentämällä välin h pituutta, jolloin nopeudeksi hetkellä $t = 3$ saadaan

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{d(3+h)-d(3)}{(3+h)-3}\frac{m}{s} = \lim_{h\to 0^+} 14 - h\frac{m}{s} = 14\frac{m}{s}.$$

Hetkellinen nopeus ajanhetkellä $t_0 \in [0; 9,58)$ voidaan laskea valitsemalla luku h väliltä $[0; 9,58 - t_0)$, jolloin

$$\frac{d(t_0+h)-d(t_0)}{(t_0+h)-t_0}\frac{m}{s} = \frac{-(t_0+h)^2+20\cdot t_0+t_0^2-20\cdot t_0}{h}\frac{m}{s} = \frac{-2t_0h-h^2}{h}\frac{m}{s} =- (2t_0 - h)\frac{m}{s}.$$

Näin ollen hetkellinen nopeus ajanhetkellä t_0 on

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{d(t_0+h)-d(t_0)}{(t_0+h)-t_0}\frac{m}{s} = \lim_{h\to 0^+} - 2t_0 - h\frac{m}{s} =- 2t_0\frac{m}{s}.$$

2.3.1 Funktion derivaatan määritelmä

Olkoon $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ ja $x_o \in A$. Oletetaan, että on olemassa $r > 0$, jolle $(x_o - r, x_o + r) \subset A$. Funktio f on *derivoituva* pisteessä x_0, jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\mathbb{R}.$$

Raja-arvoa sanotaan funktion f *derivaataksi* pisteessä x_o ja merkitään $D_x f(x_0)$. Lauseketta, josta raja-arvo lasketaan, sanotaan *erotusosamääräksi* pisteessä x_0.

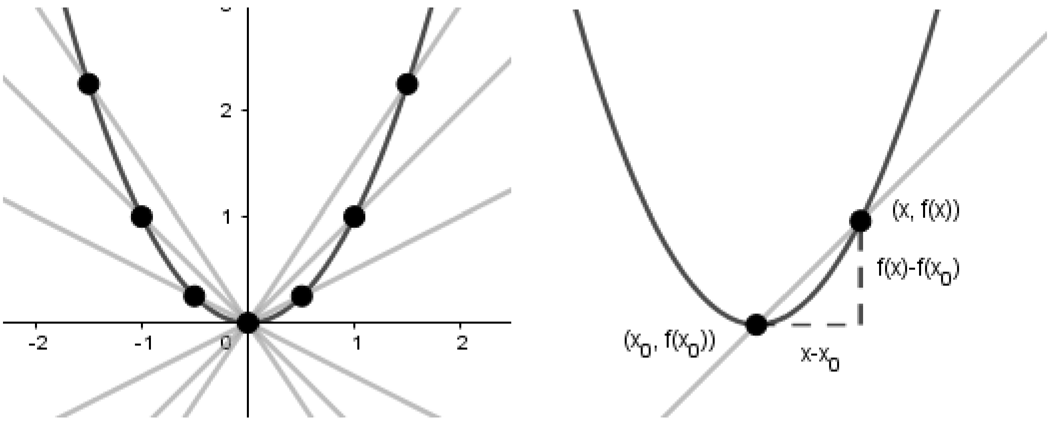
Derivoituvuusehto voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Funktion f derivaattaa pisteessä x_0 voidaan merkitä myös $f'(x_0)$.

2.3.2 Funktion derivaatta käytännössä

Erotusosamäärä voidaan tulkita myös geometrisesti pisteiden $(x, f(x))$ ja $(x_0, f(x_0))$ kautta piirretyn suoran kulmakertoimeksi. Funktiota $f(x) = x^2$ tapauksessa $x_0 = 0$ on visualisoitu kuvassa 2.5.



Kuva 2.6. Erotusosamäärän geometrinen tulkinta pisteessä $x_0 = 0$, kun $f(x) = x^2$.

Tarkastellaan edellä mainittua funktiota $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ja lasketaan määritelmän avulla sen derivaatta pisteessä $x = 2$. Koska

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2,$$

niin

$$D_x f(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4.$$

Siis funktion $f(x) = x^2$ derivaatta pisteessä $x = 2$ on 4 eli $f'(2) = 4$.

$\square$

2.3.3 Funktion toispuoleisten derivaattojen määritelmä

Olkoon $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ ja $x_0 \in A$. Oletetaan, että on olemassa $r > 0$, jolle $(x_0 - r, x_0) \subset A$. Funktio f on *vasemmalta derivoituva* pisteessä x_0, jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Raja-arvoa sanotaan funktion f *vasemmanpuoleiseksi derivaataksi* pisteessä x_0 ja merkitään $D_x^- f(x_0)$ tai $f'_-(x_0)$.

Oletetaan, että on olemassa $r > 0$, jolle $(x_0, x_0 + r) \subset A$. Funktio f on *oikealta derivoituva* pisteessä x_0, jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Raja-arvoa sanotaan funktion f *oikeanpuoleiseksi derivaataksi* pisteessä x_0 ja merkitään $D_x^+ f(x_0)$ tai $f'_+(x_0)$.

3 Derivaatta opetussuunnitelmissa sekä oppikirjoissa

Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019 mukaan sekä pitkän että lyhyen matematiikan oppimäärän opetuksen tehtävänä on perehdyttää opiskelija matematiikan peruskäsitteisiin, perusideoihin ja rakenteisiin sekä ohjata käyttämään puhuttua, kirjoitettua ja muutoin ilmaistua matematiikkaa. LOPSissa kerrotaan myös matematiikan opetuksen kehittävän laskemisen, luovan ajattelun sekä ilmiöiden mallintamisen, ennustamisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja. Miltei sanasta sanaan samalla tavalla kuvataan matematiikan oppiaineen tehtävää myös tätä edeltävässä, vuoden 2015 LOPSissa.

3.1 Derivaatta ja lukion opetussuunnitelmien perusteet

Derivaatta on ollut pakollinen kurssi lukion pitkän matematiikan oppimäärän kokonaisuudessa hyvin pitkään. Vuosien 2015 ja 2019 opetussuunnitelmissa kyseinen kurssi on ollut MAA6 Derivaatta ja se onkin muodostunut yhdeksi keskeisimmistä ja merkittävimmistä matematiikan kursseista lukion pitkässä matematiikassa. Tämä tullaan myöhemmin huomaamaan matematiikan ylioppilaskokeiden tehtävien derivaattapainotuksista.

Lukion lyhyen matematiikan oppimäärän syventävä derivaattaa käsittelevä kurssi oli vuoden 2015 LOPSissa MAB7 Matemaattinen analyysi ja myöhemmin vuoden 2019 versiossa samanniminen kurssi MAB8. Erityisen kiinnostavaa onkin myöhemmin tarkastella, missä määrin ja millä tasolla derivaatan tuntemusta vaaditaan lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden tehtävissä.

Vuosien 2015 ja 2019 lukion opetussuunnitelmien perusteiden derivaattaa käsittelevien kurssien esittelyt eroavat erityisesti pitkän matematiikan tavoitteissa ja keskeisissä sisällöissä siten, että derivaattaan liittyvää matemaattista sisältöä on tuotu vuoden 2019 LOPSiin enemmän. Opetussuunnitelmien sisäisiä eroja lyhyen ja pitkän matematiikan derivaattaa käsittelevillä kursseilla ilmenee sekä tavoitteissa että sisällöissä. Tämä lienee itsestäänselvää, sillä vuoden 2015 lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaan pitkässä matematiikassa tähdätään syvällisempään ymmärrykseen ja matemaattisen tiedon luonteen sisäistämiseen, kun taas lyhyen matematiikan oppimäärä pyrkii valmistamaan opiskelijoita matematiikan soveltamiseen enemmänkin arkipäivän ilmiöissä ja tilanteissa.

3.1.1 Derivaatta ja lyhyt matematiikka

Viimeisten kahden lukion opetussuunnitelmien perusteiden tavoitteet sekä keskeiset sisällöt kurssia Matemaattinen analyysi koskien ovat lähes identtiset. Alla esitellyt taulukot ovat mallinnuksia lukion opetussuunnitelmien perusteiden lyhyen matematiikan Matemaattinen analyysi -kurssin tavoitteista ja keskeisistä sisällöistä vuosilta 2015 ja 2019.

Tavoitteet Tavoitteena on, että opiskelija
- tutkii funktion muutosnopeutta graafisin ja ja numeerisin menetelmin
- ymmärtää derivaatan käsitteen muutosnopeuden mittana (LOPS 2015) - ymmärtää derivaatan tulkinnan funktion muutosnopeutena (LOPS 2019)
- osaa tutkia polynomifunktion kulkua derivaatan avulla
- osaa määrittää sovellusten yhteydessä polynomifunktion suurimman ja pienimmän arvon
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä funktion kulun tutkimisessa ja funktion derivaatan sekä suljetun välin ääriarvojen määrittämisessä sovellustehtävissä (LOPS 2015) - osaa käyttää ohjelmistoja funktion kulun tutkimisessa sekä funktion derivaatan ja suljetun välin ääriarvojen määrittämisessä sovellusten yhteydessä (LOPS 2019)

Taulukko 3.1. Kurssin Matemaattinen analyysi MAB7 (LOPS 2015) ja MAB6 (LOPS 2019) tavoitteet.

Vuosien 2015 ja 2019 lukion opetussuunnitelmien perusteiden mukaan lyhyen matematiikan opiskelijoiden tulee ymmärtää derivaatan käsite funktion muutosnopeutena. Tämä toki on yksi näkökulma derivaatan määrittämiseen, mutta jää kuitenkin melko kauas derivaatan tarkasta määritelmästä ja sen kokonaiskuvasta. Muissa tavoitteissa ei käytetä kyseistä ymmärtämisen käsitettä, vaan nojataan enemmänkin pintapuoliseen käsittelyyn, kuten tutkimiseen graafisin ja numeerisin menetelmin sekä määrittämiseen oletettavasti laskennallisia menetelmiä käyttäen. Näistä voidaan olettaa, että lyhyessä matematiikassa derivaatan käsittely on pitkälti laskennallista eikä niinkään syvälliseen ymmärrykseen perustuvaa.

Keskeiset sisällöt
- graafisia ja numeerisia menetelmiä
- polynomifunktion derivaatta
- polynomifunktion merkin ja kulun tutkiminen
- polynomifunktion suurimman ja pienimmän arvon määrittäminen suljetulla välillä
- funktion muutosnopeuden määrittäminen ohjelmistojen avulla (LOPS 2019)

Taulukko 3.2. Kurssin Matemaattinen analyysi MAB7 (LOPS 2015) ja MAB6 (LOPS 2019) keskeiset sisällöt.

Lyhyen matematiikan Matemaattinen analyysi -kurssin keskeiset sisällöt perustuvat polynomifunktioiden tutkimiseen, eikä kurssilla ole tarkoitus käsitellä monimutkaisempia funktioita. Keskeisten sisältöjen mukaan opitaan määrittämään polynomifunktion derivaatta sekä tutkimaan funktion ominaisuuksia derivaatan avulla. Kurssilta jää puuttumaan raja-arvon ja jatkuvuuden käsittely, jotka tarkkaan derivaatan määritelmään kiinteästi liittyvät. Näistä päätellen lyhyessä matematiikassa käsiteltävä derivaatta jää määritelmään verrattuna enemmänkin laskennalliseksi apuvälineeksi kuin yhdeksi matemaattisen analyysin peruskäsitteistä.

3.1.2 Derivaatta ja pitkä matematiikka

Pitkän matematiikan MAA6 Derivaatta -kurssin tavoitteet ja keskeiset sisällöt ovat muuttuneet enemmän kahden LOPSin välillä kuin vastaavan lyhyen kurssin. Alla olevat taulukot ovat mallinnuksia lukion opetussuunnitelmien perusteiden 2015 ja 2019 MAA6 Derivaatta -kurssin tavoitteista ja keskeisistä sisällöistä.

Tavoitteet (LOPS 2015) Tavoitteena on, että opiskelija	*Tavoitteet (LOPS 2019)* Tavoitteena on, että opiskelija
- osaa määrittää rationaalifunktion nollakohdat ja ratkaista yksinkertaisia rationaaliepäyhtälöitä	- tutustuu ilmiöiden matemaattisten mallien käyttäytymiseen derivaatan avulla
- omaksuu havainnollisen käsityksen funktion raja-arvosta, jatkuvuudesta ja derivaatasta	- omaksuu havainnollisen käsityksen funktion raja-arvosta ja jatkuvuudesta
	- ymmärtää derivaatan tulkinnan funktion muutosnopeutena
- osaa määrittää yksinkertaisten funktioiden derivaatat	- kykenee määrittämään yksinkertaisten funktioiden derivaatat
	- osaa derivoida yhdistettyjä funktioita
- osaa tutkia derivaatan avulla polynomifunktion ja kulkua ja määrittää sen ääriarvot	- hallitsee funktioiden kulun tutkimisen derivaatan avulla ja osaa määrittää niiden ääriarvot suljetulla välillä
- tietää, kuinka rationaalifunktion suurin ja pienin arvo määritetään	
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä raja-arvon, jatkuvuuden ja derivaatan tutkimisessa ja rationaaliyhtälöiden ja -epäyhtälöiden ratkaisemisessa sekä polynomi- ja rationaalifunktion derivaatan määrittämisessä sovellusongelmissa	- osaa käyttää ohjelmistoja raja-arvon, jatkuvuuden ja derivaatan tutkimisessa sovellusten yhteydessä.

Taulukko 3.3. Kurssin MAA6 Derivaatta tavoitteet LOPSeissa 2015 ja 2019.

Vuoden 2015 LOPSissa määritetään kurssin yhdeksi tavoitteeksi rationaalifunktion suurimman ja pienimmän arvon määrittäminen, mitä ei enää vuoden 2019 versiossa mainita. Myös rationaalifunktioiden nollakohtien määrittäminen ja rationaaliepäyhtälöiden käsittely on vuoden 2019 opetussuunnitelman mukaan jäänyt derivaattakurssin tavoitteista kokonaan pois. Nämä kuitenkin löytyvät edelleen kurssin keskeisistä sisällöistä. Kummassakin LOPSissa mainitaan derivaatan määritelmän kannalta oleelliset käsitteet raja-arvo ja jatkuvuus, mikä tuo opiskelijoiden ymmärryksen lähemmäs derivaatan oikeaa ilmentymää ja luonnetta. Uusina tavoitteina vuoden 2019 LOPSiin on tuotu yhdistetyn funktion derivaatta sekä derivaatan tulkinnan ymmärtäminen funktion muutosnopeutena.

Keskeiset sisällöt (LOPS 2015)	*Keskeiset sisällöt (LOPS 2019)*
- rationaaliyhtälö ja -epäyhtälö	
- funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta	- funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta
- polynomifunktion, funktioiden tulon ja osamäärän derivoiminen	- polynomi- ja rationaalifunktioiden sekä juurifunktioiden derivaatat - funktioiden tulon ja osamäärän derivaatta
	- sini- ja kosinifunktioiden sekä eksponentti- ja logaritmifunktioiden derivaatat
	- yhdistetty funktio ja sen derivointi
- polynomifunktion kulun tutkiminen ja ääriarvojen määrittäminen	- funktion kulun tutkiminen ja ääriarvojen määrittäminen

Taulukko 3.4. Kurssin MAA6 Derivaatta keskeiset sisällöt LOPSeissa 2015 ja 2019.

Kuten taulukosta 3.3. jo huomattiin, myös kurssin keskeisistä sisällöistä ovat jääneet pois rationaaliyhtälöiden ja -epäyhtälöiden käsittely. Näiden tilalle ovat tulleet monimutkaisempien funktioiden derivaattojen tarkastelu, joita ei vuoden 2015 opetussuunnitelman perusteissa kurssin sisältöihin oletettu kuuluvan ollenkaan. Näyttää siltä, että lukion derivaattaa käsittelevä kurssi on opetussuunnitelman perusteiden mukaan melko lähellä luvussa 2 esiteltyä analyysitason derivaattaa. Tarkastellaan seuraavaksi lyhyen ja pitkän matematiikan oppikirjojen avulla tarkemmin, miten derivaattaa opetetaan lukiossa.

3.2 Derivaatan esittäminen lukion oppimäärän kirjasarjoissa

Lukion lyhyen ja pitkän oppimäärän opetussuunnitelmien mukaiset tavoitteet ja sisällöt eroavat derivaattaa käsittelevillä kursseilla melko paljon ja tämä on nähtävissä myös oppikirjoja tarkastelemalla. Käydään seuraavaksi lyhyesti läpi nykyisen opetussuunnitelman mukaiset lyhyen ja pitkän matematiikan derivaattakurssien oppikirjat ja tarkastellaan, millaista derivaatan opetus näissä teoksissa on.

3.2.1 Lyhyen matematiikan oppikirja Huippu 7

Uusimmankin opetussuunnitelman mukainen lyhyen matematiikan oppikirja Huippu 7 on Matemaattinen analyysi MAB7 -kurssin oppikirja, joka on otettu käyttöön ensimmäisen kerran vuoden 2015 LOPSin aikana. Tarkastellaan vuoden 2017 painosta.

Kirjan ensimmäisessä luvussa käsitellään funktion keskimääräistä ja hetkellistä muutosnopeutta kulmakertoimen merkitystä korostaen. Kulmakerroin määritellään kirjan esimerkeissä ja tehtävissä pitkälti kuvan perusteella tutkien ja laskien tai sopivaa ohjelmaa hyödyntäen. Funktion hetkellisen nopeuden käsitteeseen yhdistetään hyvissä ajoin derivaatan käsite ja ensimmäisen luvun loppuosa puhutaankin derivaatasta funktion kulmakertoimen tietyn ajanhetken tulkinnan sijaan.

Kirjan toinen luku käsittelee derivaattafunktiota ja keskittyy pitkälti derivaatan laskennalliseen osuuteen. Funktion derivaatta määritellään seuraavasti:

Johdannossa muodostettiin funktio, jonka arvo oli alkuperäisen funktion kuvaajalle kohtaan x piirretyn tangentin kulmakerroin. Muodostettua funktiota kutsutaan alkuperäisen funktion **derivaattafunktioksi**. Derivaattafunktiota kutsutaan usein lyhyesti derivaataksi. Menetelmää, jolla derivaattafunktion lauseke määritetään, kutsutaan **derivoinniksi**.

Derivaatan merkitys jää irralliseksi ja taka-alalle laskentaan nähden, sillä tangenttien kulmakertoimista ei kappaleen ensimmäisen luvun jälkeen teoriaosuuksissa enää näy mainintaa. Luvusta kuitenkin löytyy käytännönläheisempiä tehtäviä, jotka rinnastavat derivaatan käsitteen jälleen hetkelliseen muutosnopeuteen.

Luvussa 3 tarkastellaan funktion kulkua epäyhtälöiden ja merkkikaavioiden avulla. Funktion kasvavuus ja vähenevyys yhdistetään derivaattaan kappaleen 3.2 alussa.

Kirjan viimeinen luku käsittelee funktion analysointia. Luvun ensimmäisessä kappaleessa opitaan määrittämään funktion suurin ja pienin arvo funktion derivaatan funktion nollakohtien ja suljetun välin päätepisteiden avulla.

3.2.2 Pitkän matematiikan oppikirja Juuri 6

Pitkän matematiikan Derivaatta MAA6 -kurssin mukainen oppikirja Juuri 6 on otettu käyttöön vuoden 2015 opetussuunnitelman aikana, mutta se on käytössä vielä uusimmassakin opetussuunnitelmassa. Tarkastellaan vuoden 2015 painosta.

Oppikirjan ensimmäinen luku käsittelee rationaalifunktioita ja niiden määrittelyehtoja. Luvussa edetään rationaaliepäyhtälöihin asti ja rakennetaan vankka pohja myöhemmin opittavien raja-arvojen käsittelylle.

Kirjan toinen luku aloitetaan melko pikaisesti raja-arvon määritelmällä:

> Funktion f **raja-arvo** kohdassa a on luku b, jos funktion arvo lähestyy lukua b, kun x lähestyy kohtaa a. Tällöin merkitään $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Lukiossa käyty raja-arvon määritelmä sivuaa raja-arvon tarkkaa määritelmää joiltain osin. Mielivaltaisen pienet r, ε ja δ on korvattu termillä “lähestyy” ja päädytään samaan tulokseen oikoreittiä. Idea lukion raja-arvon määritelmän taustalla on kuitenkin sama.

Luvussa käsitellään myös toispuoleisia raja-arvoja sekä funktion jatkuvuutta, joiden määritelmät ovat samaa tasoa kuin edellä esitetty. Määritelmien ideat ovat pelkistettyjä, mutta periaatteessa lähellä tarkkaa määritelmää.

Kirjan kolmannessa kappaleessa ollaan valmiita hyppäämään derivaatan pariin ja siihen syvennytään funktion muutosnopeuden tutkimisen avulla. Seuraavasta kappaleesta löytyy derivaatan määritelmä, joka esitetään melko tarkasti erotusosamäärän raja-arvon kautta:

> Funktion f muutosnopeus eli **derivaatta** kohdassa a on $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, mikäli kyseinen raja-arvo on olemassa. Tällöin sanotaan, että funktio f on **derivoituva kohdassa** a. Keskimääräistä muutosnopeutta $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ sanotaan myös **erotusosamääräksi**. Derivaatta on **erotusosamäärän raja-arvo** $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Näin ollen pitkän matematiikan opiskelijat pääsevät käsiksi analyysitasoiseen matematiikkaan ja saavat kiinni derivaatan oikeasta merkityksestä jo lukiossa, kun derivaatasta puhutaan vuoroin muutosnopeutena, erotusosamääränä sekä itse derivaattana. Vasta määritelmien jälkeen käsitellään derivaattafunktiota ja paneudutaan itse laskemiseen ja laskusääntöihin.

Oppikirjan viimeiset kappaleet paneutuvat polynomi- ja rationaalifunktioiden kulkuun ja ääriarvoihin derivaattaa ja funktion kulkukaavioita apuna käyttäen.

4 Derivaattatehtävät ylioppilaskokeissa vuosina 2015-2020

Lukio-opetusta ja sen toteutusta ajavat opetussuunnitelman perusteet ja oppikirjat, joita tarkasteltiin edellisessä luvussa. Lukion oppimäärä kuitenkin kulminoituu viimeiseen koitokseen; ylioppilaskokeisiin, minkä tarkastelu on vähintäänkin yhtä merkittävää kuin itse opetuksen.

Tässä luvussa tarkastellaan lyhyen ja pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden tehtäviä ja niiden pisteytyksiä vuosilta 2015-2020, tarkemmin kevään 2015 kokeista aina kevään 2020 kokeisiin asti. Huomiota kiinnitetään erityisesti siihen, missä määrin derivaatta ylioppilaskokeissa näkyy ja painottuu, millaisia tehtäviä ylioppilaskokeisiin on valikoitunut sekä siihen, kuinka paljon derivaatan hallinnasta on ollut jaossa pisteitä.

4.1 Yleistä matematiikan ylioppilaskokeista

Ylioppilaskokeet ovat ajautuneet viime vuosina suurten muutosten polulle. Parempien graafisten laskinten yleistyttyä 2010-luvun alkupuolella jouduttiin pohtimaan, kuinka paljon valtaa voidaan antaa laskimille, jotka tekevät käytännössä kaiken laskemisen opiskelijan puolesta. Näinpä kevään 2016 matematiikan ylioppilaskoe jaettiin kahteen osaan, joista vain B-osassa sai käyttää graafista laskinta.

Toinen merkittävä viime vuosien murros matematiikan ylioppilaskokeiden osalta on teknologian kehittyminen, joka ajaa yhteiskuntaa aina vain sähköisempään suuntaan. Tätä hyödynnetään tietysti myös lukio-opetuksessa, minkä vuoksi on järkevää huomioida sähköiset alustat ja niiden käyttö ylioppilaskokeissa. Matematiikan osalta ylioppilaskokeet siirtyivät kokonaan sähköisille alustoille keväällä 2019. Nykyisessä matematiikan ylioppilaskokeessa on kaksi osaa, A- ja B-osat, joista vain jälkimmäisessä saa käyttää matemaattisia apuohjelmia, kuten graafista laskinta. Kokeen B-osa on jaettu vielä B1- ja B2-osiin.

Matematiikan ylioppilaskokeiden sähköistymisen myötä myös pisteytysjärjestelmä muuttui. Aikaisempina vuosina jokaisen lyhyen matematiikan tehtävän maksimipistemäärä oli 6, mutta kevään 2019 kokeesta lähtien jokaisesta lyhyen matematiikan ylioppilaskokeen tehtävästä on voinut saada enintään 12 pistettä. Pitkän matematiikan pisteytys taas muuttui jo keväällä 2016, kun 9 pisteen jokeritehtävistä luovuttiin ja päätettiin muuttaa jokaisen tehtävän maksimipistemäärä 6 pisteeseen. Matematiikan ylioppilaskokeiden sähköistyminen vaikutti pitkän matematiikan ylioppilaskokeisiin samalla tavalla kuin lyhyenkin kokeisiin muuttaen jokaisen koetehtävän maksimipistemäärän kahteentoista pisteeseen.

4.2 Derivaattatehtävät lyhyen matematiikan ylioppilaskokeissa

Vuosina 2015-2020 derivaattapainotteisia tehtäviä on lyhyen matematiikan ylioppilaskokeissa ollut miltei joka vuosi, vaikka vuoden 2015 LOPS muuttikin derivaattakurssin pakollisesta syventäväksi kurssiksi.

Derivaattatehtäviä on ollut kaikenkaikkiaan 1-2 kappaletta ylioppilaskoetta kohden, joista huomattavan suuri osa on ollut soveltavia tehtäviä. Määritellään käsite “soveltava tehtävä” ja muut tehtävätyypit myöhemmin luvussa 4.2.2. Tarkastellaan seuraavaksi lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattapainotteisten tehtävien määrää viimeisen viiden vuoden ajalta.

4.2.1 Tehtävien määrällinen tarkastelu

Kokonaisuudessaan tarkastelun kohteena olevan ajanjakson aikana kokeissa oli derivaatan hallintaa vaativia tehtäviä ollut 0-3 kappaletta, kun kokeissa on ollut kaiken kaikkiaan 13-15 tehtävää. Näin ollen derivaattatehtäviä lyhyen matematiikan ylioppilaskokeissa on ollut 0-23% kaikista tehtävistä. Mikäli kevään 2019 derivaattatehtävätöntä koetta ei oteta huomioon, nousee derivaattatehtävien prosenttiosuus 8-23%:een mikä on lähempänä varsinaista jakaumaa. Tehtävien laatu on vaihdellut helpoista derivaattalaskuista vaativampiin soveltaviin tehtäviin, mitä tarkastellaan enemmän seuraavassa luvussa 4.2.2.

Alla oleva kaavio havainnollistaa lyhyen matematiikan ylioppilaskokeen derivaattaa vaativia tehtäviä kaikkiin tehtäviin suhteutettuna. “X” merkitsee tehtävää, jonka ratkaisussa tarvitaan derivaattaa ja vinoviiva tehtävää, jossa voidaan käyttää derivaattaa, mutta se ei ole välttämätöntä. Jatkossa kumpaankin tehtävätyyppiin viitataan tehtävänä, jossa vaaditaan derivaatan hallintaa. Taulukkoon on merkitty paksulla vaakaviivalla vuonna 2016 käyttöön otettu osiin jaettu koe, missä ensimmäiset neljä tehtävää muodostavat A-osan ja ovat pakollisia, ilman graafista laskinta laskettavia tehtäviä. Loput tehtävät muodostavat B1- ja B2-osat, joissa matemaattisten apuohjelmien käyttö on sallittua. Molemmista B-osan tehtävistä valitaan 3 tehtävää. B-osat eroavat toisistaan lähinnä vaikeusasteiltaan. Tarkastellaan tätäkin lisää myöhemmin luvussa 4.2.2.

	K15	S15	K16	S16	K17	S17	K18	S18	K19	S19	K20
1				x*							
2											
3		x									
4			x*			/*					
5								x			
6	x					x	x				
7											
8		x								x	x
9	x				x						
10											
11											/
12				x	x						
13								x			x
14											
15											

*Taulukko 4.1. Lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden derivaatan hallintaa vaativat tehtävät vuosina 2015-2020. (*derivaatan osaaminen pakollista, /derivaattaa ei välttämättä tarvita)*

Taulukosta 4.1 nähdään, että vuonna 2016 derivaatan osaaminen lyhyen matematiikan ylioppilaskokeissa on ollut pakollista, mikäli on tähdännyt täysiin pisteisiin. Myös syksyn 2017 kokeen pakollisiin tehtäviin on taulukon mukaan sisällytetty derivaattaa vaativa tehtävä, mikä on alunperin tarkoitettu ratkaistavaksi ilman derivaattaa. Kyseisessä tehtävässä on sattunut painovirhe, mutta tehtävästä on kuitenkin voinut saada maksimipisteet myös painovirheen mukaisen tehtävänannon noudattamisesta. Muina vuosina kokeen on voinut suorittaa täysin pistein kokonaan ilman derivaatan hallintaa.

Tehtäviä, joiden ratkaisussa on voitu käyttää derivaattaa, on lyhyen matematiikan ylioppilaskokeissa ollut joka vuosi keskimäärin 2 kappaletta. Tähän suurimmat poikkeukset tekevät kevät 2019, jolloin derivaattaa ei kokeessa vaadittu ollenkaan, ja sitä seuraava kevät 2020, jolloin derivaatan osaamista vaativia tehtäviä oli peräti 3 kappaletta. Vuonna 2020 derivaattatehtävän valinta ei kuitenkaan ollut pakollista. Muuten derivaattapainotteisia tehtäviä on ollut melko säännöllisesti 1-2 ylioppilaskoetta kohden.

4.2.2 Tehtävien laadullinen tarkastelu

Tarkastellaan seuraavaksi vuosien 2015-2020 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden derivaatan hallintaa vaativien tehtävien sisältöä ja vaikeustasoa. Määritellään tätä varten kolme luokkaa, joihin tehtävät voidaan jakaa.

PERUSTEHTÄVÄ	SOVELTAVA TEHTÄVÄ	ABSTRAKTI TEHTÄVÄ
Tehtävän derivaattapainotus näkyy suoraan tehtävänannossa	Tehtävän derivaattapainotus näkyy suoraan tehtävänannossa tai se voidaan selkeästi huomata suoraan tehtävätyypistä	Tehtävän derivaattapainotus ei välttämättä ole suoraan nähtävissä tehtävänannosta, vaan se täytyy päätellä itse
Tehtävän ratkaisu ei vaadi derivointia ja/tai derivaatan arvoa haastavampaa laskentaa	Tehtävän ratkaisu vaatii perustehtävää haastavampaa laskentaa, kuten funktion kasvavuuden tarkastelua, tai tehtävän ratkaisu vaatii derivoinnin lisäksi muutakin laskentaa	Tehtävän ratkaisu vaatii soveltavaa tehtävää haastavampaa laskentaa tai derivaatan tarvitseminen ratkaisussa ei ole itsestäänselvää
Esim. S16 tehtävä 1	Esim. K15 tehtävä 6 tai S16 tehtävä 12	

Taulukko 4.2. Lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien laatuluokittelu.

Lasketaan selvyyden vuoksi taulukon mukaan määritellyistä laatuluokista lyhyen matematiikan ylioppilaskoetehtäviä ja perustellaan tehtävien laatuluokitus tehtävänantojen ja malliratkaisujen mukaan. Malliratkaisujen rakentamisessa on käytetty apuna Ylioppilastutkintolautakunnan määrittämiä hyvän vastauksen piirteitä. Linkki kyseisiin dokumentteihin löytyy liiteluettelosta.

S16 tehtävä 1, perustehtävä

Määritellään funktio $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 7$.

a) Laske $f(1)$.
b) Laske $f'(2)$.

Ratkaisu:

a) $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 + 7 = 1 - 2 + 1 + 7 = 7$
b) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$
$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 12 - 8 + 1 = 5$

Tehtävän b-kohta kuuluu selkeästi perustehtävä-luokkaan, sillä ratkaisu vaatii yksinkertaisen polynomifunktion derivointia sekä derivaattafunktion arvon laskemista pisteessä. Tehtävän ratkaisu ei vaadi haastavampaa laskentaa ja tehtävänannosta on suoraan luettavissa derivoimisen tarpeellisuus. Tehtävä on kuulunut A-osaan ja ollut siten pakollinen tehtävä eikä sen ratkaisussa ole saanut käyttää graafista laskinta tai muita apuohjelmia.

K15 tehtävä 6, soveltava tehtävä

Metrin pituisista haloista kasataan suorakulmaisen särmiön muotoinen pino. Pino suojataan pressulla sekä päältä että kahdelta vastakkaiselta sivulta (kuvion mukaisesti). Määritä halkopinon leveys *x* ja korkeus *h* silloin, kun pressun pinta-ala on 10 neliömetriä ja pinon tilavuus on suurin mahdollinen.

Ratkaisu:

Pressun pinta-alaehto: $(x + 2h) \cdot 1 = 10 \Leftrightarrow x + 2h = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 2h$
Halkopinon tilavuus $V(h) = x \cdot 1 \cdot h = (10 - 2h) \cdot h = - 2h^2 + 10h,\ h > 0$
$V'(h) = - 4h + 10 = 0 \Leftrightarrow 4h = 10 \Leftrightarrow h = \frac{5}{2}$
Koska funktion $V(h)$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, on kyseessä maksimikohta.
Siis leveys $x = 10 - 2h = 10 - 5 = 5$(m) ja korkeus $h = 2,5$(m).

Kyseinen tehtävä on tyypillinen ääriarvotehtävä, johon on totuttu kurssin aikana. Kun tehtävänannossa määritellään laskettavaksi jotakin, jonka tilavuus, korkeus, pinta-ala tai muu vastaava on suurin tai pienin mahdollinen, on lähes aina tehtävä ratkaistavissa derivaattaa apuna käyttäen. Näin ollen tehtävänannosta nähdään suoraan, että tehtävässä on tarkoitus käyttää derivaattaa.

Tehtävän malliratkaisun mukaan tehtävässä derivoidaan funktiota ja tarkastellaan sen nollakohtaa. Tehtävässä on tarkoitus tutkia alkuperäisen funktion kulkua ja huomata, että derivaattafunktion nollakohta on funktion maksimikohta. Näin ollen pelkän derivoimisen hallinta ei riitä tehtävän lopulliseen ratkaisuun.

Näiden perustelujen myötä voidaan luokitella kyseinen tehtävä soveltavaksi tehtäväksi.

S16 tehtävä 12, soveltava tehtävä

Sanomme, että derivoituva funktio on *konveksi*, jos sen derivaatta on kasvava funktio.

a) Osoita, että $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ ei ole konveksi.
b) Tutki, millä vakion $a \in \mathbb{R}$ arvoilla funktio $g(x) = x^4 + ax^2 + 2$ on konveksi.

Ratkaisu:

a) $f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$
Funktion $f'(x)$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten $f'(x)$ ei ole kasvava kaikkialla.
Siis funktio $f(x)$ ei ole konveksi.

b) $g'(x) = 4x^3 + 2ax$
Jos $a \geq 0$ niin g' on kasvava, eli funktio $g(x)$ on konveksi.
Jos $a < 0$ niin g' on vähenevä, eli funktio $g(x)$ ei ole konveksi.

Tehtävänannosta voidaan suoraan lukea, että ratkaisussa tarvitaan derivaatan hallintaa jossakin muodossa. Tehtävän laskennallinen osuus keskittyy ainoastaan derivointiin, mutta tehtävän lopullinen ratkaisu kuitenkin vaatii funktion kasvavuuden ja toisaalta myös vähenevyyden tarkastelua. Tämän vuoksi tehtävä ei ole määritellyn luokittelun perusteella perustehtävä vaan soveltava tehtävä.

Rakennetun laatuluokituksen mukaan vuosina 2015-2020 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeissa ei ollut tämän luokituksen mukaan abstrakteja derivaattatehtäviä. Vaikeustasoltaan jokainen derivaatan hallintaa vaativa tehtävä voidaan asettaa perus- tai soveltavan tehtävän laatuluokkaan, sillä ne eivät täytä abstraktin tehtävän laatukriteerejä.

Ylioppilaskokeiden sähköistyminen myötä vaikeusastevaihteluja soveltavien tehtävien luokan sisällä esiintyy jonkin verran lähinnä siten, missä vaiheessa kokeen A-, B1- tai B2-osaa derivaattatehtävä esiintyy. Esimerkiksi kokeen neljäs tehtävä voidaan melko selkeästi nähdä helpommaksi kuin vaikkapa tehtävä, joka on sijoitettu kokeen viimeiseksi tehtäväksi. Kuitenkin yleisesti ottaen kokeen neljäs tehtävä on tehty vaikeammaksi kuin sitä seuraava viides tehtävä. Osien sisällä tehtävät yleensä vaikeutuvat osan loppua kohden. Vaikeusasteita ilmenee siis sekä koko kokeen että kolmen osan välillä. Vaikeusasteita tarkastellaan lisää luvussa 5.1.1.

Miltei kaikki lukion lyhyen matematiikan vuosien 2015-2020 ylioppilaskokeiden derivaatan hallintaa vaativista tehtävistä voidaan luokitella soveltaviksi tehtäviksi. Kyseisissä kokeissa oli yhteensä 17 derivaattatehtävää, joista peräti 16 olivat soveltavia. Jäljelle jäävä yksi perustehtävä on käyty läpi malliratkaisuineen laatuluokitteluja perusteltaessa. Kyseinen tehtävä on ollut kokeen ensimmäinen tehtävä.

16 soveltavasta derivaattatehtävästä viisi olivat perinteisiä tehtäviä, joiden tehtävänannossa vihjataan derivoimiseen kuvailemalla tilannetta, jossa täytyy laskea derivaatan avulla paras mahdollinen muuttujan arvo, jotta päästäisiin tehtävänannon määräämään ideaaliin tilanteeseen. Esimerkiksi syksyn 2018 kokeen tehtävässä 13 tuli määrittää aitauksen suurin mahdollinen kokonaispinta-ala. Tämän tyyppisissä tehtävissä opiskelijan tulee ensitöikseen ymmärtää tehtävän idean liittyvän derivaattafunktion nollakohtien tutkimiseen, jotta saadaan tietoon kaikki funktion maksimi- tai minimikohdat. Tehtävän ratkaisu aloitetaan muodostamalla tutkittavalle tilanteelle funktio, jonka derivaattaa ja sen nollakohtia lähdetään tutkimaan. Tämän jälkeen opiskelijan tulee tutkia, onko saatu nollakohta haluttu ideaalinen arvo ja perustella sen toimivuus. Kyseinen tehtävätyyppi testaa opiskelijan derivaatan osaamista funktion derivoinnin, derivaattafunktion nollakohtien ratkaisemisen sekä funktion maksimi- ja minimikohtien osalta. Tällaisia tehtäviä on näkynyt sekä derivaattakurssien opetuksessa että matematiikan ylioppilaskokeissa jo pitkään.

Otokseen sisältyy myös pari tehtävää, joiden tehtävänannossa mainitaan tangentti. Sekä lyhyessä että pitkässä matematiikassa opiskelijoiden tulisi osata yhdistää kyseinen termi suoraan derivaatan käsitteeseen. Tämäntyyppiset tehtävät ratkaistaan muodostamalla funktion tangentille yhtälö ja tutkimalla sitä tehtävänannon määräämällä tavalla. Kyseisen tyypin tehtävissä testataan opiskelijan ymmärrystä derivaatan ja kulmakertoimen yhteydestä perinteisen funktion derivoinnin lisäksi.

Useissa lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattapainotteisissa tehtävissä käytetään kuvia funktioiden kuvaajista tehtävänantojen mukana. Yleinen kokeissa näkynyt tehtävätyyppi pyysi määrittämään joitakin ominaisuuksia kuvassa olevan funktion derivaattafunktiosta kuvaajan perusteella tai päinvastaisesti funktion ominaisuuksia derivaattafunktion kuvaajan perusteella. Kuvaajista pyydettiin tutkimaan myös funktioiden ja derivaattafunktioiden kasvavuutta sekä vähenevyyttä, ja funktioiden ja derivaattafunktioiden arvoja tietyissä pisteissä. Vuosina 2015-2020 kokeissa oli yhteensä viisi tällaista tehtävää, joista mainittakoon hyvänä esimerkkinä kevään 2016 tehtävä 4, mikä oli kaikille kokeen tekijöille pakollinen tehtävä. Tehtävässä tuli hahmotella funktion kuvaajan perusteella derivaattafunktion kuvaaja sekä eri derivaattafunktion perusteella sitä vastaavan funktion kuvaaja.

Otoksessa oli myös muita yksittäisiä tehtäviä, joissa mitattiin derivaatan hallintaa monipuolisesti funktion derivoinnin, funktion kulun sekä derivaattafunktion arvojen myötä. Esimerkiksi kevään 2020 ylioppilaskokeen viimeinen tehtävänanto esitteli hypoteettisen ratkaisun funktion suurimman arvon määrittämisestä tietyllä välillä ja opiskelijan tehtävänä oli selittää ratkaisussa tehdyt virheet sekä esittää korjattu versio ratkaisusta. Funktion suurimman arvon määrittämisen lisäksi tehtävä testasi opiskelijan matemaattista lukutaitoa sekä virheentunnistuskykyä.

4.3 Derivaattatehtävät pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa

Vuosien 2015-2020 pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa derivaatan osaaminen on ollut yksi keskeisimmistä taidoista ja siihen liittyviä tehtäviä on ollut laajasti niin perus- kuin soveltavinakin tehtävinä. Määritellään käsitteet “perus- ja soveltava tehtävä” sekä muut tehtävätyypit myöhemmin luvussa 4.3.2.

Derivaattatehtäviä on ollut pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa viime vuosina keskimääräisesti noin kolme kappaletta ylioppilaskoetta kohden. Tarkastellaan seuraavaksi tarkemmin pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattapainotteisten tehtävien määrää.

4.3.1 Tehtävien määrällinen tarkastelu

Kokonaisuudessaan derivaatan hallintaa vaativia tehtäviä vuosina 2015-2020 on ollut melko hajanaisesti nollasta kuuteen kappaletta ylioppilaskoetta kohden, kun kokeissa on ollut kaiken kaikkiaan 13-15 tehtävää. Yhteensä derivaattatehtäviä on ollut siis noin 0-40% kaikista tehtävistä. Mikäli syksyn 2015 derivaattatehtävätöntä koetta ei oteta huomioon, on derivaattatehtäviä ollut 15-40% kaikista tehtävistä, mikä on lähempänä varsinaista totuutta.

Alla oleva kaavio havainnollistaa pitkän matematiikan ylioppilaskokeen derivaattaa vaativia tehtäviä kaikkiin tehtäviin suhteutettuna. “X” merkitsee tehtävää, jossa tarvitaan derivaattaa ja vinoviiva tehtävää, jossa voidaan käyttää derivaattaa, mutta se ei ole välttämätöntä. Jatkossa kumpaankin tehtävätyyppiin viitataan tehtävänä, jossa vaaditaan derivaatan hallintaa. Taulukkoon on merkitty paksulla vaakaviivalla vuonna 2016 käyttöön otettu osiin jaettu koe, missä ensimmäiset neljä tehtävää muodostavat A-osan ja ovat pakollisia, ilman graafista laskinta laskettavia tehtäviä. Loput tehtävät muodostavat B1- ja B2-osat, joissa matemaattisten apuohjelmien käyttö on sallittua. Molemmista B-osan tehtävistä valitaan kolme tehtävää. B-osat eroavat toisistaan lähinnä vaikeusasteeltaan. Tarkastellaan tätäkin lisää myöhemmin.

	K15	S15	K16	S16	K17	S17	K18	S18	K19	S19	K20
1						x*	x*				
2										x*	
3							/*		/*		/*
4			x*	x*		x*		x*		/*	x*
5											
6											/
7					x			x			
8											
9	x		/				x			/	/
10	x				x					/	
11			x				x		/		
12						x	/		/		
13	x						x	x			x
14											
15											

*Taulukko 4.3. Pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden derivaatan osaamista vaativat tehtävät vuosina 2015-2020. (*derivaatan osaaminen pakollista, /derivaattaa ei välttämättä tarvita)*

Taulukosta nähdään, että derivaatan osaaminen täysiin pisteisiin tähdättäessä on ollut pakollista seitsemässä kokeessa otoksen kaikista 11 kokeesta. Jäljelle jäävät neljä ylioppilaskoetta on voinut läpäistä täysin pistein kokonaan ilman derivaatan hallintaa. Tämä lukema on melko suuri, sillä LOPS kuitenkin määrittää derivaatan käsittelyyn kokonaisen pakollisen kurssin, minkä tuloksia käytetään kyseisen kurssin jälkeenkin ahkerasti.

Derivaatan hallintaa vaativia tehtäviä on ollut pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa keskimäärin kolme ylioppilaskoetta kohden, mikä kuulostaa lukion oppimäärään suhteutettuna melko sopivalta. Suurinta hajontaa aiheuttaa syksyn 2015 koe, jolloin derivaattaan liittyviä tehtäviä ei ollut ollenkaan. Tämä johtunee sähköisten ylioppilaskokeiden suunnittelusta ja niiden aiheuttamasta paineesta. Myös kevään 2018 koe oli poikkeuksellinen, sillä tällöin derivaatan osaamista edellyttäviä tehtäviä oli yhteensä peräti kuusi kappaletta. Näistä kaksi tehtävää oli kuitenkin voitu ratkaista vaihtoehtoisesti myös ilman derivaattaa.

4.3.2 Tehtävien laadullinen tarkastelu

Tarkastellaan seuraavaksi vuosien 2015-2020 pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden derivaatan hallintaa vaativien tehtävien sisältöä ja vaikeustasoa. Määritellään tätä varten kolme luokkaa, joihin tehtävät voidaan jakaa. Käytetään samaa kolmiportaista laatuluokitusta, kuin lyhyenkin matematiikan ylioppilaskokeiden tehtävissä.

PERUSTEHTÄVÄ	SOVELTAVA TEHTÄVÄ	ABSTRAKTI TEHTÄVÄ
Tehtävän derivaattapainotus näkyy suoraan tehtävänannossa	Tehtävän derivaattapainotus näkyy suoraan tehtävänannossa tai se voidaan selkeästi huomata suoraan tehtävätyypistä	Tehtävän derivaattapainotus ei välttämättä ole suoraan nähtävissä tehtävänannosta, vaan se täytyy päätellä itse
Tehtävän ratkaisu ei vaadi derivointia ja/tai derivaatan arvoa haastavampaa laskentaa	Tehtävän ratkaisu vaatii perustehtävää haastavampaa laskentaa, kuten funktion kasvavuuden tarkastelua, tai tehtävän ratkaisu vaatii derivoinnin lisäksi muutakin laskentaa	Tehtävän ratkaisu vaatii soveltavaa tehtävää haastavampaa laskentaa tai derivaatan tarvitseminen ratkaisussa ei ole itsestäänselvää
Esim. S17 tehtävä 1	Esim. K20 tehtävä 4 tai K15 tehtävä 13	Esim. S18 tehtävä 13

Taulukko 4.4 Pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien laatuluokittelu.

Lasketaan selvyyden vuoksi taulukon 4.4 mukaan määritellyistä laatuluokista pitkän matematiikan ylioppilaskoetehtäviä ja perustellaan tehtävien laatuluokitus tehtävänantojen ja malliratkaisujen mukaan. Malliratkaisujen rakentamisessa on käytetty apuna Ylioppilastutkintolautakunnan määrittämiä hyvän vastauksen piirteitä. Linkki kyseisiin dokumentteihin löytyy liiteluettelosta.

S17 tehtävä 1, perustehtävä

a) Laske ja sievennä derivaatta $f'(2)$, kun $f(x) = x^5 + 5x$.
b) Laske ja sievennä derivaatta $g'(\pi)$, kun $g(x) = sin(x)$.
c) Laske ja sievennä derivaatta $h'(2t)$, kun $h(x) = \frac{ln(x)}{x}$.

Ratkaisu:

a) $f'(x) = 5x^4 + 5$ joten $f'(2) = 5 \cdot 2^4 + 5 = 85$
b) $g'(x) = cos(x)$ joten $g'(\pi) = sin(\pi) =- 1$
c) $h'(x) = \frac{1-ln(x)}{x^2}$ joten $h'(2t) = \frac{1-ln(2t)}{(2t)^2} = \frac{1-ln(2t)}{4t^2}$

Tehtävä kuuluu selkeästi perustehtävä-luokkaan, sillä tehtävänannossa kerrotaan suoraan derivoinnin tarpeellisuudesta. Tehtävän ratkaisuun vaaditaan suhteellisen yksinkertaisten funktioiden derivointia sekä funktioiden arvojen laskemista annetuissa pisteissä. Nämä täyttävät perustehtävän kriteerit. Tehtävä on ollut pakollinen tehtävä eikä sen ratkaisussa ole saanut käyttää laskinta tai muita apuohjelmia.

K20 tehtävä 4, soveltava tehtävä

Piste (x, y) toteuttaa epäyhtälön $x^4 + y^2 \leq 1$. Määritä pisteen (x, y) suurin mahdollinen etäisyys origosta.

Ratkaisu:

Pisteen etäisyys origosta: $\sqrt{x^2 + y^2}$
Tarkastellaan reunaa $x^4 + y^2 = 1$
Tällöin $y^2 = 1 - x^4$, joten maksimoidaan etäisyyden neliö $x^2 + 1 - x^4$ välillä $-1 \leq x \leq 1$

$D(x^2 + 1 - x^4) = 2x - 4x^3 = 0$
$\Leftrightarrow x(2 - 4x^2) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ tai $4x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

Kulkukaavio:

	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{1}{2}}$	
$f'(x)$	+		-		+	-
$f(x)$	kasvava		vähenevä		kasvava	vähenevä

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio saa suurimmat arvonsa silloin, kun $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Siis suurin mahdollinen etäisyys on $\sqrt{(\sqrt{\frac{1}{2}})^2 + 1 - (\sqrt{\frac{1}{2}})^4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Yllä esitelty tehtävä on tyypillinen derivaattakurssilla esiintyvä tehtävä, jossa tarkoituksena on etsitä funktion minimi tai maksimi, jotta voitaisiin saavuttaa tietty tehtävänannon määräämä ideaalitilanne. Tällaiset tehtävät on lähes poikkeuksetta tarkoitettu ratkaistavaksi derivaattaa apuna käyttäen. Siis tehtävänannon tyypistä on suoraan nähtävissä, että tehtävän ratkaisussa on tarkoitus käyttää derivaattaa.

Malliratkaisussa etsitään ensin maksimoitava funktio, jota lähdetään sitten totutusti derivoimaan. Saadusta derivaattafunktiosta lasketaan nollakohdat ja muodostetaan kulkukaavio, josta voidaan todeta ideaalinen muuttujan arvo. Tämän jälkeen muuttujan arvo on sijoitettu alkuperäiseen funktioon, josta on saatu vastaus alkuperäiseen tehtävänantoon. Koska tehtävän ratkaisussa on tarkoitus tutkia funktion kulkua ja maksimiarvoa, ei ratkaisuun riitä pelkkä funktion derivointi.

Näiden perustelujen myötä tehtävä voidaan luokitella soveltavaksi tehtäväksi.

K15 tehtävä 13, soveltava tehtävä

a) Osoita erotusosamäärää tutkimalla, että funktio $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ on derivoituva kohdassa $x = 0$.

b) Olkoon $g(x) = f'(x)$, kun $x \in \mathbb{R}$. Osoita erotusosamäärää tutkimalla, että funktio $g(x)$ ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$.

Ratkaisu:

a) Erotusosamäärä $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$, $h \neq 0$

$= (\frac{0+h}{1+|0+h|} - \frac{0}{1+|0|}) \div h$

$= \frac{h}{1+|h|} \div h$

$= \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{1+|h|}$

$= \frac{1}{1+|h|}$

Nyt $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{1+|h|} = 1 = f'(0)$. Väite on siten todistettu.

b) $g(x) = f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, kun $x > 0$ ja $\frac{1}{(1-x)^2}$, kun $x < 0$

Tarkastellaan siis erikseen tapauksia, kun $h > 0$ ja $h < 0$.

Tehtävän a-kohdan mukaan $g(0) = f'(0) = 1$.

$h > 0$: $\frac{1}{h} \cdot (\frac{1}{(1+h)^2} - 1) = \frac{-2-h}{(1+h)^2}$

$\lim\limits_{h \to 0_+} \frac{-2-h}{(1+h)^2} =- 2 \neq f'(0)$

$h < 0$: $\frac{1}{h} \cdot (\frac{1}{(1-h)^2} + 1) = \frac{2-h}{(1-h)^2}$

$\lim\limits_{h \to 0_-} \frac{2-h}{(1-h)^2} = 2 \neq f'(0)$

Koska toispuoleiset raja-arvot (toispuoleiset derivaatat) ovat erisuuret, niin funktiolla $g(x)$ ei ole derivaattaa origossa.

Tehtävänannossa mainitaan derivoituvuus ja erotusosamäärä, mistä voidaan suoraan nähdä tehtävän ratkaisussa vaadittavan derivaattaa. Vastaavanlaisia tehtäviä on laskettu jo kurssilla, joten tehtävän ei tulisi olla kovinkaan vaativa, vaikka se kokeen viimeisenä tehtävänä onkin ollut.

Tehtävässä on tarkoitus tutkia erotusosamäärän avulla kahden funktion derivoituvuutta. A-kohdassa todistetaan derivoituvuus ja b-kohdassa taas, että toinen funktio ei ole derivoituva. Tehtävän ratkaisuun päästäkseen tulee opiskelijan osata pelkän funktion derivoinnin lisäksi muutakin derivaattaan liittyvää laskentaa.

Näiden perustelujen nojalla voidaan todeta tehtävän luokittuvan soveltavaksi tehtäväksi.

Kuten lyhyessäkin matematiikassa, myös pitkän matematiikan kokeissa vaikeusastevaihteluja soveltavien tehtävien luokan sisällä esiintyy lähinnä sekä kokeen tehtävänumerollisen paikan suhteen että A-, B1- ja B2-osien sisällä. Esimerkiksi kokeen neljäs tehtävä voidaan melko selkeästi nähdä helpommaksi kuin vaikkapa tehtävä, joka on sijoitettu kokeen viimeiseksi tehtäväksi. Tähän voi kuitenkin ilmetä myös poikkeuksia. Tarkastellaan vaikeusastevaihteluita tarkemmin luvussa 5.2.1.

S18 tehtävä 13, abstrakti tehtävä

a) Määritä sellainen vakion a tarkka arvo, että yhtälöllä $x^2 = a + ln(x)$ on täsmälleen yksi ratkaisu $x > 0$.

b) Edellinen kohta voidaan yleistää korvaamalla x^2 kasvavalla funktiolla $f(x)$, jolle pätee $f''(x) > 0$ kaikilla $x > 0$. Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen vakion a arvo, jolla yhtälöllä $f(x) = a + ln(x)$ on täsmälleen yksi ratkaisu $x > 0$.

Ratkaisu:

a) Olkoon $g(x) = x^2 - a - ln(x)$, kun $x > 0$. Koska $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = 0$ vain yhdessä pisteessä $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, niin yhtälön ratkaisuja voi olla korkeintaan 2.
Ratkaisu on yksikäsitteinen ⇔ $g(x_0) = g'(x_0) = 0$, josta seuraa $a = \frac{1}{2}(1 + ln(2))$.

b) Merkitään $h(x) = f(x) - a - ln(x)$, kun $x > 0$.
Koska $f(x)$ on kasvava, niin $f'(x) \geq 0$, ja koska $f''(x) > 0$ kaikilla $x > 0$, on oltava $f'(x) > 0$ kaikilla $x > 0$. Tällöin $h'(x) = f'(x) - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow xf'(x) = 1$.
Jos tällä yhtälöllä on kaksi eri ratkaisua $x_1, x_2 > 0$, niin (Rollen lauseen perusteella) niiden välissä on funktion $p(x) = xf'(x)$ derivaatan nollakohta c
$\Rightarrow p'(c) = f'(c) + xf''(c) = 0$
$\Rightarrow f''(c) = -\frac{f'(c)}{c} < 0$, joka on ristiriita.
Koska $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ ja $\frac{1}{x}$ on vähenevä, niin yhtälöllä $xf'(x) = 1$ on ratkaisu $x_0 > 0$, joka on edellisen perusteella yksikäsitteinen.
Tehtävän ehto toteutuu ainoastaan silloin, kun $h(x_0) = 0$, josta seuraa $a = f(x_0) - ln(x_0)$.

Tehtävänannon perusteella voidaan ainoastaan b-kohdan perusteella todeta tehtävän liittyvän derivaattaan jollakin tavalla. Derivaatta näkyy tehtävänannossa kuitenkin vain kerran ja silloinkin ainoastaan yhtenä ehtona. Näin ollen tehtävän derivaattapainotuksen ymmärtäminen on melko pitkälti opiskelijan päättelykyvyn varassa, mikä kallistaa tehtävän laatua abstraktiin suuntaan.

Tehtävän malliratkaisu ei ole kovinkaan pitkä, mutta vaatii kuitenkin edistyneempää laskenta- ja päättelykykyä. Tehtävässä pyöritellään hieman vaikeampia funktioita ja käytetään apuna derivaattafunktioiden ominaisuuksia. Myös tehtävän todistusluonteisuus tuo tehtävän ratkaisemiseen haastetta, mitä ei soveltavissa tehtävissä nähdä. Tehtävän ratkaisu vaatiikin syvempää ymmärrystä ja aiheen todellista hallintaa.

Näiden perusteluiden vuoksi kyseinen tehtävä voidaan luokitella abstraktiksi tehtäväksi.

Erittäin suuri osa pitkän matematiikan vuosien 2015-2020 ylioppilaskokeiden derivaattapainotteisista tehtävistä voidaan edellä mainitun laatuluokituksen mukaan sijoittaa soveltavan tehtävän laatuluokkaan. Tarkasteltavissa kokeissa oli yhteensä 33 derivaatan hallintaa vaativaa, joista peräti 28 ovat luokiteltavissa soveltaviksi tehtäviksi. Jäljelle jäävät viisi tehtävää ovat perus- ja abstrakteja tehtäviä.

Perustehtävä on määritelty edellä mainitun luokituksen mukaan nimensä mukaisesti perustason tehtäväksi, jossa derivoinnin lisäksi ei juuri muuta derivaatan hallintaa vaadita. Tällaisia tehtäviä pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa oli kaiken kaikkiaan kolme kappaletta, joista yksi on esitelty ylempänä malliratkaisuineen laatuluokitteluja perusteltaessa. Nämä perustehtävät olivat aiemmin esiteltyyn verraten hyvin samankaltaisia; tehtävänannot määräsivät laskemaan ja sieventämään derivaattafunktiota tai määrittämään derivaattafunktion arvoja joissakin pisteissä. Tätä vaativampaa laskentaa perustehtävissä ei vaadittu. Perustehtäviksi luokitellut tehtävät ovat kaikki olleet kokeen tehtäväpaikalla 1 tai 2. Kaikki muut kokeiden derivaattatehtävät ovat joko soveltavia tai abstrakteja tehtäviä ja sijoittuvat kokeiden tehtäväpaikoille numerosta 3 ylöspäin.

Valtaosa pitkän matematiikan ylioppilaskoetehtävistä oli soveltavia tehtäviä. Soveltava tehtävä määriteltiin yllä perustehtävää vaativammaksi tehtäväksi, joka ei kuitenkaan vaativuudeltaan yllä abstraktin tehtävän tasolle.

Yksi soveltavien tehtävien tyypeistä oli tuttu ja turvallinen ääriarvotehtävä, jonka tehtävässä vihjataan derivaatan tarpeellisuuteen esimerkiksi kuvailuin: “suurin mahdollinen” tai “kuinka suurella nopeudella vähenee”. Tällaisista vihjeistä tulisi päätyä muodostamaan funktio, jota lähdetään tehtävässä minimoimaan tai maksimoimaan ja lopulta perustelemaan sen toimivuus. Tehtävätyypissä testataan niin funktion derivoinnin, derivaatan nollakohtien ratkaisemisen kuin maksimi- ja minimikohtien määrittämisenkin hallitsemista. Vastaavanlaisia tehtäviä otoksessa ilmeni kahdeksan kappaletta. Tämän tyypin tehtävät eivät lyhyen matematiikan vastaavaan tehtävätyyppiin verrattuna ole aina yhtä yksinkertaisia pinta-alan tai tilavuuden määrittelyjä, vaan maksimoinnin kohteena oli esimerkiksi keväällä 2020 myös pisteen (x, y) etäisyys origosta tehtävässä 4.

Yhteensä kahdeksan soveltavaa tehtävää painottui derivaattafunktion perusominaisuuksien eli ääriarvojen, kasvavuuden tai vähenevyyden ja nollakohtien tutkimiseen. Tällaiset tehtävät ovat tärkeitä derivaatan ominaisuuksien ymmärtämisen ja rutinoitumisen kannalta. Esimerkiksi kevään 2016 tehtävässä 4 tuli määrittää kuvaajan perusteella derivaattafunktion nollakohdat sekä tutkia alkuperäisen funktion kasvavuutta ja ääriarvokohtia. Nämä derivaattafunktioiden perusominaisuuksien tutkimiseen perustuvat tehtävät voisi periaatteessa sijoittaa laajennettuun perustehtäväluokkaan, mutta koska ne vaativat nykyisiä perustehtäväluokkaa edustavia tehtäviä enemmän tietoa derivaatasta, on ne mielekkäintä tulkita soveltaviksi tehtäviksi.

Muutamassa soveltavassa tehtävässä derivaatan hallintaa testattiin abstraktimmalla tasolla esimerkiksi funktion derivoituvuuden tarkastelun ja sen myötä erotusosamäärän pyörittelyn merkeissä. Näissä tehtävissä olennaisimpana on ymmärtää kahden edellä mainitun yhteys ja osata käyttää niitä. Erotusosamäärää vaativa tehtävä on esitelty malliratkaisuineen soveltavan tehtävän laatuluokkaa perustellessa.

Soveltavien tehtävien luokkaan sijoittuivat myös sellaiset tehtävät, joiden tehtävänannossa vihjattiin derivaattaan tehtävänannossa käyttämällä merkintää f' osana jotakin toista funktiota. Esimerkiksi kevään 2015 tehtävä 10 määrittää funktion $f(x)$, jota käytetään edelleen muodossa $f'(x)^2$ määritettäessä uutta funktiota. Tällöin derivaatan laskeminen ei ole tehtävän pääpointti, mutta se on kuitenkin tehtävän etenemisen kannalta ratkaiseva tekijä. Tähän tehtävätyyppiin sisältyvät myös erilaiset käänteis- ja yhdistetty funktio -tehtävät, joihin sisällytetään myös derivaatan hallintaa.

Jäljelle jäävät soveltavat tehtävät olivat edellä mainituista tehtävätyypeistä poikkeavia tai niissä ilmeni runsaita päällekkäisyyksiä tehtävätyyppien aiheiden suhteen. Eräs poikkeuksellinen tehtävä on kevään 2020 tehtävä 6, jossa tuli määrittää paraabelin tangentteja sekä tiettyä pistettä lähinnä oleva piste ja näiden etäisyys. Derivaatta ilmenee tällöin sekä tangentin idean että pienimmän mahdollisen etäisyyden määrittämisen myötä.

Tehtävä määriteltiin kuuluvan abstraktiin luokkaan, mikäli sen ratkaisu vaatii haastavampaa laskentaa kuin soveltava tehtävä tai jos derivaatan tarvitseminen tehtävässä ei ole itsestäänselvää. Tällaisia tehtäviä otoksen kokeissa oli kaksi. Toisessa näistä tuli laskea pomppivan pallon kaikkien yli metrin korkuisten pomppujen määrä. Periaatteessa tehtävän voisi luokitella soveltavaksi, sillä siinä tutkitaan derivaattafunktion nollakohtia ja tehtävän laskentaosuus on kohtuullisen helppo. Kuitenkin tehtävän idean ymmärtäminen vaatii soveltavaa tehtävää enemmän, eikä derivaatan käyttö tässä tehtävässä ole itsestäänselvää. Siksi tehtävä onkin mielekkäintä luokitella abstraktiksi. Myöhemmin tehtävä jätetään pois derivaattatehtävien tarkastelusta, sillä sen ratkaisu ei intuitiivisesti vaadi derivaatan hallintaa ratkaisun saavuttamiseksi. Toinen tehtävätyypin edustaja, syksyn 2018 tehtävä 13, sisältää tehtävänannossaan viittauksen derivaattaan määrittämällä $f''(x) > 0$. Tehtävässä myös pyydetään määrittämään vakion arvo siten, että ratkaisuja on tietty määrä, mikä viittaa derivaatan nollakohtien määrään. Kuitenkin tehtävässä vaadittava laskennallinen osuus on sen verran haastava ja vaatii derivaatan ominaisuuksien syvempää ymmärrystä ja oivalluksia, että tehtävä kallistuu abstraktin tehtävän puolelle. Nämä kaksi abstraktia tehtävää ovat olleet kokeiden 13. ja 10. tehtävä, mikä myös osaltaan kertoo tehtävien haastavuudesta.

5 Derivaattatehtävien pisteytykset ja tehtävävalinnat matematiikan ylioppilaskokeissa vuosina 2015-2020

Tässä luvussa perehdytään muun muassa siihen, millaisia pistepainotuksia matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävillä on ollut ja miten nämä näkyvät tehtävien laadun sekä vaikeusasteiden suhteen. Tämän ohessa käydään läpi tehtävien tyyppejä sekä niiden yleisyyttä ylioppilaskokeissa. Lisäksi myös tutkitaan derivaattatehtävien pistejakaumia sekä opiskelijoiden tehtävätyyppimieltymyksiä tehtävävalintojen perusteella pääteltynä. Luvun tutkimus perustuu Ylioppilastutkintolautakunnan vuosien 2015-2020 matematiikan ylioppilaskokeiden tehtäväkohtaisiin pistejakaumiin ja niiden analysoinnin myötä tehtyyn tulkintaan.

5.1 Lyhyen matematiikan derivaattatehtävien pisteytykset ja valinnat

Tarkastellaan ensin lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien pisteytyksiä ja pistejakaumia sekä opiskelijoiden tekemiä tehtävävalintoja vuosina 2015-2020. Derivaattatehtäviä oli näissä kokeissa yhteensä 17, joista ainoastaan yksi oli selkeästi mahdollista ratkaista muulla tavalla kuin derivaattaa apuna käyttäen. Kyseinen tehtävä oli kevään 2020 tehtävä 11, jonka tehtävänannossa pyydettiin selvittämään erään nelitahokkaan suurin mahdollinen tilavuus, mikä viittaa intuitiivisesti tehtävänannon perusteella derivaattatehtävään. Tarkastellaan siis kaikkia 17 tehtävää derivaattatehtävinä.

5.1.1 Derivaattatehtävien pisteytykset

Derivaatan ilmentyminen lyhyen matematiikan ylioppilaskoetehtävän ratkaisussa on tässä tutkielmassa määritelty siten, että sen tulee sisältää suoraan derivaatan käyttöä tai liittyä vahvasti sen sovelluksiin. Esimerkiksi funktion derivaatta ja sen nollakohtien ratkaiseminen tulkitaan derivaatan ilmenemiseen tehtävässä. Myös esimerkiksi derivaatan arvon laskeminen pisteessä tulkitaan derivaattaan liittyväksi, vaikka itse funktion arvon laskeminen pisteessä ei laskennallisesti derivaattaa vaadikaan.

Lyhyen matematiikan derivaattatehtävistä on YTL:n hyvän vastauksen piirteiden mukaan annettu derivaatan osaamisesta 0-12 pistettä. Näin ollen derivaatta on esiintynyt tehtävissä laajalla skaalalla sekä hyvin pienissä osissa että koko tehtävän laajuisesti. Vuosien 2015-2018 kokeissa tavallisten tehtävien maksimipistemäärä oli 6, kun taas vuoden 2019 ylioppilaskokeiden sähköistymisen jälkeen tehtävien maksimipistemäärä nousi 12:een. Vuosina 2015-2018 derivaattatehtäviksi luokiteltujen tehtävien derivaattaa vaativista osuuksista on ollut jaossa keskimäärin noin 3,75 pistettä, joten derivaatan hallinnan antamat pisteet yksittäisen tehtävän kokonaispistemäärään suhteutettuna on keskimäärin noin 63%. Vuosina 2018-2020 taas derivaattatehtävien derivaattaosuuksista on ollut mahdollista saada keskimäärin noin 8,25 pistettä. Siten vuosina 2019-2020 derivaattatehtävien derivaattaosuus on ollut noin 69%. Derivaattatehtävien derivaattaosuus ei siis ole juurikaan muuttunut ylioppilaskokeiden sähköistymisen ja suurempien maksimipistemäärien myötä.

Lyhyen matematiikan tehtävien derivaattaosiot painottuvat hyvin pitkälti helppoihin ja yleisimpiin derivaatan sovelluksiin. Perinteistä funktion derivointia vaadittiin jopa 14 tehtävässä ja sama määrä tehtävänantoja pyysi ratkaisemaan joko derivaatan nollakohdat tai derivaatan arvon jossain muussa tietyssä pisteessä. Seitsemässä tehtävässä pisteitä sai derivaattafunktion kulkua tarkastelemalla ja derivaattafunktion maksimi- sekä minimikohtien tutkimisesta pisteitä annettiin kuudessa tehtävässä. Muutaman tehtävän ratkaisussa vaadittiin derivaattafunktion ominaisuuksien päättelyä kuvaajan perusteella. Näiden derivaatan osa-alueiden sisällyttämisestä derivaattatehtävän oikeaan ratkaisuun on saanut yksittäin 1-3 pistettä ja suuremmat pistemääräkokonaisuudet on voinut saavuttaa tehtävistä, joissa tehtävänanto on vaatinut useampia edellä mainituista osa-alueista.

Edellisissä luvuissa määritelty derivaattatehtävien laatuluokittelu jakaa tehtävät kolmeen luokkaan; perustehtäviin, soveltaviin tehtäviin ja abstrakteihin tehtäviin. Lyhyen matematiikan vuosien 2015-2020 ylioppilaskokeissa tehtävät olivat yhtä perustehtävää lukuunottamatta soveltaviksi luokiteltavia tehtäviä. Kyseinen perustehtävä on syksyn 2016 ensimmäinen tehtävä, minkä derivaattaosuudessa tuli laskea derivaattafunktion arvo pisteessä. Derivaattaa tarvittiin tehtävän b-osiossa ja siitä oli jaossa pisteitä enintään 3.

Vielä vuonna 2015 lyhyen matematiikan ylioppilaskoe oli 15 tehtävän mittainen, eikä sitä oltu jaoteltu erillisiin osiin. Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä oli 6. Kokeiden vaikeusasteen oli karkeasti arvioituna tarkoitettu nousevan lineaarisesti siten, että kokeen ensimmäinen tehtävä on helpoin ja viimeinen vaikein. Vuonna 2015 lyhyen matematiikan kokeissa oli yhteensä neljä derivaattatehtävää, joista kaikki on luokiteltavissa soveltaviksi tehtäviksi. Tehtävät olivat kevään kokeessa tehtäväpaikoilla 6 ja 9, kun taas syksyn kokeessa tehtävät sijoittuivat paikoille 3 ja 8. Näin ollen kumpaankin kokeeseen on valikoitunut yksi helpompi ja yksi hieman haastavampi derivaattatehtävä. Näissä kokeissa derivaattatehtävien derivaattaosuudesta on saanut 1-2 pistettä, keskimäärin noin 29% koko tehtävän pisteistä. Kevään kokeen tehtävien derivaattaosuudet käsittelivät funktion derivaattaa sekä sen nollakohtia ja arvoa muussa tietyssä pisteessä. Syksyn kokeessa derivaattapisteet liittyivät derivaattafunktion kulun tutkimiseen sekä funktion derivaatan nollakohtien ratkaisemiseen.

Keväällä 2016 siirryttiin uuteen matematiikan ylioppilaskokeen rakenteeseen, joka koostuu kolmesta osasta. Kokeen A-osasta tulee ratkaista kaikki neljä tehtävää, B1-osan viidestä tehtävästä valitaan ratkaistavaksi kolme ja B2-osan neljästä tehtävästä kolme. Tehtävät vaikeutuvat edellä mainittujen kolmen osan sisällä suurin piirtein siten, että osien sisällä tehtävät vaikeutuvat loppua kohden. Seuraavaksi esitelty vaikeusasterakenne on suuntaa-antava ja sitä käytetään tässä tutkielmassa helpottamaan pistejakaumien tulkintaa ja antamaan tuloksille lisäulottuvuuksia. Kyseinen arvio tehtävien vaikeusasteisiin on esitelty alla olevassa taulukossa 5.1.

	A-osa		**B1-osa**		**B2-osa**
1.tehtävä	helppo	5.tehtävä	melko helppo	10.tehtävä	soveltava
2.tehtävä	melko helppo	6.tehtävä	helpohko	11.tehtävä	haastava
3.tehtävä	soveltava	7.tehtävä	soveltava	12.tehtävä	abstrakti
4.tehtävä	haastava	8.tehtävä	soveltava	13.tehtävä	abstrakti
		9.tehtävä	haastava		

Taulukko 5.1. Nykyisen matematiikan ylioppilaskokeen arvioitu rakenne vaikeusasteittain.

Vuosina 2016-2020 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden A-osissa on ollut yhteensä kaksi derivaattapainotteista tehtävää. Kevään 2016 kokeen 4. tehtävä käsitteli koko tehtävän laajuisesti derivaattaa ja sen ominaisuuksia ja oli siten 6 pisteen arvoinen. Tehtävässä annettiin funktioiden $f(x)$ ja $g'(x)$ kuvaajat ja tarkoituksena oli hahmotella kuvaajat funktioille $f'(x)$ ja $g(x)$. Kyseinen tehtävä vaati päättelykykyä sekä taitoa hahmottaa funktion ja sen derivaattafunktion ominaisuuksia, sekä päinvastoin, kuvaajan perusteella. Näin ollen taulukon 5.1 mukainen luokittelu pätee tähän tehtävään, sillä kyseinen tehtävä on ollut melko haastava. Syksyn 2016 kokeen derivaattatehtävä sijoittui tehtäväpaikalle 1 ja sen derivaattaosuus oli yhteensä 3 pisteen arvoinen. Tehtävänanto määräsi laskemaan derivaattafunktion arvon pisteessä, joten tehtävä on helppo. Aiemmin määritellyn laatuluokittelun mukaan kyseinen tehtävä on määritelty myös perustehtäväksi.

Kolmeen osaan jaetun matematiikan ylioppilaskokeen toisessa osassa eli B1-osassa on ollut yhteensä kuusi derivaattatehtävää vuosina 2016-2020. Syvennytään tarkastelemaan ensin vuosia 2016-2018, jolloin tehtävien maksimipistemäärä oli 6. Näin ollen jäljelle jäävät viisi tehtävää olivat sijoittuneet kokeen paikoille 5, 6, 8 ja 9. Tehtävien derivaatan hallinnasta saatavat maksimipisteet olivat 4, 3, 6, 5 ja 2. B1-osion helpomman pään tehtävissä piti derivaatan osalta tulkita funktion kuvaajan perusteella derivaattafunktion ominaisuuksia, laskea suurimpia mahdollisia lipputuloja, sekä ratkaista derivaattafunktioiden nollakohtia ja tutkia niiden kulkua. Vaikeammissa, tehtäväpaikkojen 8 ja 9 tehtävissä taas tuli määrittää tangentin yhtälö ja määrittää Golden Gate -sillan vaijerin yhtälö sekä kaapelin ja sitä kannattelevan tornin välinen kulma. Nämä tehtävät ovat jo tehtävänantojen perusteella selkeästi haastavampia kuin edellä mainitut kolme.

B2-osassa vuosien 2016-2018 kokeissa on ollut yhteensä kolme derivaattatehtävää, jotka sijoittuivat tehtäväpaikoille 12 ja 13. Syksyn 2016 ja kevään 2017 tehtävät paikalta 12 ovat molemmat olleet derivaattapainotuksiltaan 6 pisteen arvoisia tehtäviä, kun taas syksyn 2018 tehtävä 13 mahdollisti derivaattaosuuden hallinnasta 2 pistettä. Tehtävät on luokiteltu vaikeusasteiltaan abstrakteiksi. Syksyn 2016 tehtävä pyytää tutkimaan funktioiden kulkua ja kevään 2017 tehtävä taas määrää kuvailemaan sanallisesti derivaatan ominaisuuksia. Syksyn 2018 tehtävän 13 derivaattapainotus on jäänyt melko vähäiseksi ja derivaatan hallinnasta saatavat pisteet jäävät derivaattafunktion nollakohtien ratkaisemisen ja merkkikaavion rakentamisen tasolle.

Vuoden 2019 matematiikan ylioppilaskokeiden sähköistyminen nosti kokeiden tehtävien enimmäispistemäärät 12:een aiemman 6 pisteen maksimin sijaan. Uusien pisteytysten mukaisissa lyhyen matematiikan kokeissa on ollut yhteensä kolme derivaattatehtävää, jotka sijoittuvat kokeen B1- ja B2-osiin tehtäväpaikoille 8 ja 13. Vuoden 2019 syksyn kokeen tehtävässä 8 tuli määrittää tangentin yhtälö ja sen derivaattaosuudesta oli jaossa enintään 5 pistettä. Seuraavan kevään 8. tehtävä keskittyi kokonaan derivaattaan ja jaossa oli siten derivaatan hallinnasta kokonaiset 12 pistettä. Tehtävässä pyydettiin selvittämään missä välin kohdassa funktio vähenee nopeimmin. Taulukon mukaan tehtävät ovat vaikeusasteeltaan haastavia. Samaisen kokeen viimeinen tehtävä oli selkeästi haastavampi. Tehtävänannossa annettiin virheellinen malliratkaisu annettuun tehtävään ja pyydettiin selittämään vastauksen virheet korjatun ratkaisun kera. Tehtävä oli tehtäväpaikalla 13 ja sen ratkaisu painottui kokonaan funktion derivaattaan ja sen sovelluksiin.

5.1.2 Derivaattatehtävien pistejakaumat tehtävätyypin mukaan

Tarkastellaan seuraavaksi lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien pistejakaumia. Tutkitaan, minkä tyyppisistä tehtävistä on saatu eniten tai vähiten pisteitä ja näkyvätkö edellä määritellyt laatu- ja vaikeusasteluokittelut tehtävistä saaduissa pistemäärissä.

Otoksen tehtävistä jopa 12:ssa tehtävässä suurin määrä opiskelijoita on saanut 0 pistettä kaikista tarjolla olevista pistemääristä. Tämä tarkoittaa sitä, että yli 70% derivaattatehtävistä ovat olleet kokeen tehneille opiskelijoille niin vaikeita, että useimmin saavutettu pistemäärä tehtävästä on 0. Jäljelle jäävistä viidestä tehtävästä opiskelijat ovat saaneet eniten pistemääriä 1, 2, 3 ja 4. Tutkittaessa vuosien 2015-2018 kokeita, joissa tehtävien maksimipistemäärä oli 6, vähiten opiskelijoita sai pistemääriä 3, 4, 5 ja 6. Tämän lisäksi jo aiemmin esille tulleesta ainoasta lyhyen matematiikan perustehtäväksi luokitellusta derivaattatehtävästä, syksyn 2016 tehtävästä 1, saatiin vähiten pistemäärää 0.

Suuri osa lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävistä on sisältänyt perinteistä yksinkertaisten funktioiden derivointia ja niiden saamien arvojen laskemista tietyissä pisteissä. Yleistä on ollut myös derivaattafunktion kulun ja ääriarvojen tutkiminen. Vuosina 2015-2020 derivaattatehtäviksi luokiteltavia tehtäviä on ollut yhteensä 17, joista kaksi oli pakollisia tehtäviä ja yksi ratkaistavissa muuten kuin derivaattaa käyttämällä. Tutkitaan kaikkia 17 tehtävää derivaattatehtävinä.

Jaotellaan karkea kolmiosainen luokittelu derivaattatehtäville niiden derivaattaosuuden sisällön mukaisesti, jotta voidaan tutkia näiden derivaatan osa-alueiden hallintaa pistejakaumien perusteella. Jokainen tehtävä asetetaan siihen sopivimpaan luokkaan. Tehdään jaottelu seuraavan taulukon 5.2 mukaisesti:

funktion derivointi ja derivaattafunktion arvo tietyssä pisteessä	**funktion kulun ja/tai ääriarvojen tutkiminen**	**edeltäviä soveltavampi tai muu derivaatan ominaisuuksiin liittyvä laskenta**
K15 tehtävä 6	S15 tehtävä 3	K16 tehtävä 4
K15 tehtävä 9	S16 tehtävä 12	K17 tehtävä 12
S15 tehtävä 8	K20 tehtävä 8	K18 tehtävä 6
S16 tehtävä 1		S18 tehtävä 5
K17 tehtävä 9		K20 tehtävä 13
S17 tehtävä 6		
S18 tehtävä 13		
S19 tehtävä 8		
K20 tehtävä 11		

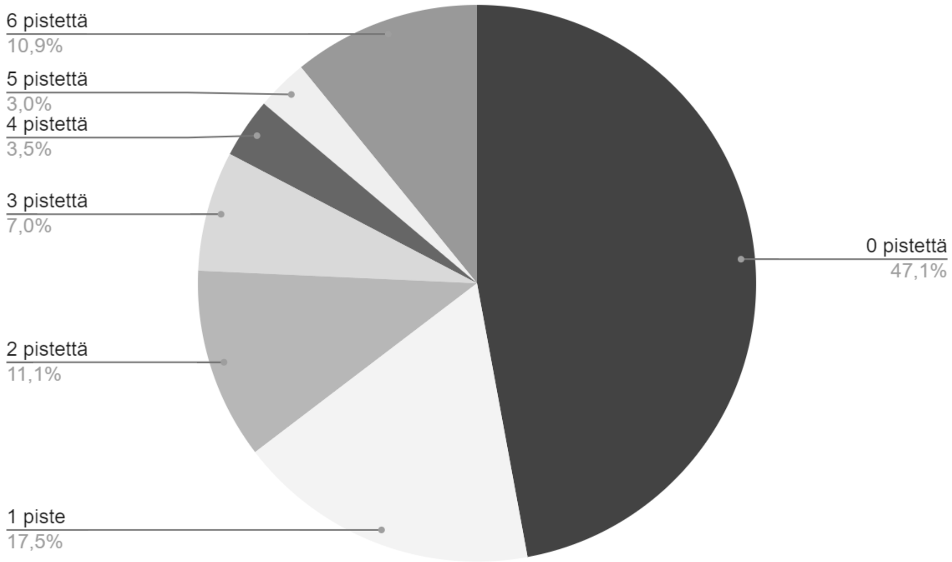
Taulukko 5.2. Lyhyen matematiikan vuosien 2015-2020 ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien derivaattaosuuksien mukainen luokittelu tehtävittäin.

Tarkastellaan ensin taulukon 5.2 ensimmäistä saraketta, johon on sijoitettu sellaiset tehtävät, joiden derivaattaosuus perustuu pitkälti funktion derivaatan laskemiseen ja edelleen derivaattafunktion arvon määrittämiseen tietyssä pisteessä. Jaottelun mukaisia tehtäviä on yhteensä yhdeksän, joista ensimmäiset seitsemän ovat olleet maksimipisteiltään 6 pisteen arvoisia ja viimeisestä kahdesta tehtävästä on voinut saada enintään 12 pistettä. Tarkastellaan näitä erikseen.

Suurimman poikkeuksen yleiseen pistejakaumaan tekee syksyn 2016 tehtävä 1, jossa muista tehtävistä poiketen eniten on ansaittu pistemäärää 6. Kyseisessä tehtävässä 0 pistettä on saanut 178 opiskelijaa ja 6 pistettä jopa 1786 opiskelijaa. 1054 opiskelijaa on saanut puolet pisteistä, kun yhteensä tehtävän on tehnyt 4326 opiskelijaa. Loput saadut pisteet jakautuvat melko tasaisesti siten, että jopa 85% opiskelijoista on saanut tehtävästä 3 pistettä tai enemmän.

Toisen poikkeuksen jakaumaan tekee syksyn 2017 tehtävä 6, jossa 0 pistettä saaneiden määrä ei ole yhtä merkittävä, kuin muissa tehtävissä. Kyseiseen tehtävään vastasi 2831 opiskelijaa, joista 991 sai 0 pistettä. Kuitenkin 3 pistettä tai enemmän on tehtävästä saanut vain noin 12% opiskelijoista.

Kaikissa muissa vuosien 2015-2018 käsiteltävän tehtävätyypin derivaattatehtävissä yli puolet opiskelijoista on saanut 0 pistettä. Vähiten opiskelijoita on sijoittunut pistemäärien 3, 4, 5 ja 6 kohdalle. Keskimääräiset pistejakaumatulokset on esitelty alla olevassa kaaviossa 5.1.

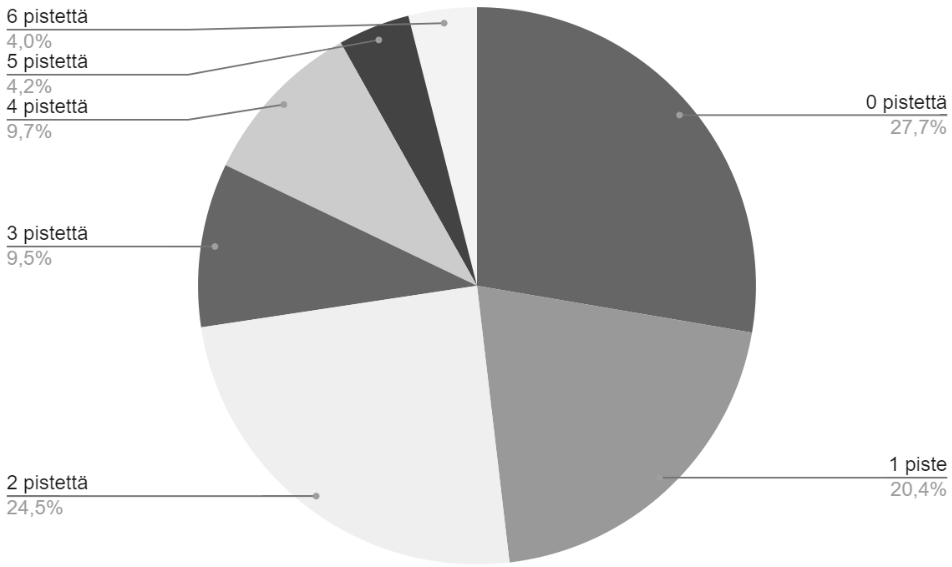


Kaavio 5.1. Keskimääräiset pistejakaumatulokset vuosien 2015-2018 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden funktion derivointia ja sen arvoa pisteessä koskevissa derivaattatehtävissä.

12 pisteen maksimipistemääräisiä tehtäviä oli tämän luokittelun sisällä yhteensä kaksi kappaletta. Syksyn 2019 tehtävässä 8 noin kolmasosa oli saanut 0 pistettä ja toinen kolmasosa 2 pistettä. Noin kymmenesosa oli saanut yhden pisteen ja toinen kymmenesosa täydet 12 pistettä. Loput pisteet jakautuivat melko tasaisesti. Kevään 2020 tehtävä 11 on ollut selkeästi haastava, sillä jopa 3420 opiskelijaa sai 0 pistettä, kun kyseiseen tehtävään vastasi yhteensä 3729 opiskelijaa. Keskimääräiset tulokset painottuvat hyvin pitkälti pieniin pistemääriin. Keskimäärin 0 pistettä näistä kahdesta tehtävästä sai noin 71%, 2 pistettä noin 12% ja 1 pisteen noin 5,5% opiskelijoista. Loput saadut pistemäärät jäävät alle 3 prosentin, pois lukien saavutetut 12 pistettä, minkä sai 3,3% opiskelijoista.

Tutkitaan seuraavaksi taulukon 5.2 toista saraketta, jonka kolmessa tehtävässä pääpainona on ollut derivaattafunktion kulun ja/tai ääriarvojen tutkiminen. Syksyn 2015 tehtävän pistejakauman suurin luku löytyy 0 pisteen kohdalta, kun taas lopuissa kahdessa tehtävässä suurimmat luvut ovat pistemäärien 2 ja 4 kohdalla. Koska viimeinen sarakkeen tehtävistä on vuodelta 2020 ja siten enintään 12 pisteen arvoinen, voidaan karkeasti arvioida 6 pisteen enimmäispistemäärään verraten saatujen pisteiden 2 ja 4 olevan suurin piirtein samat.

Vaikka syksyn 2015 tehtävä 3 keräsi nollapisteille jääneitä opiskelijoita noin 30%, sai kuitenkin noin 35% opiskelijoista kyseisestä tehtävästä 3 pistettä tai enemmän. Syksyn 2016 tehtävässä 12 noin 22% opiskelijoista jäi kokonaan ilman pisteitä ja 3 pistettä tai enemmän keräsi 17% opiskelijoista. Keskimääräiset pistejakaumatulokset on esitelty alla olevassa kaaviossa 5.2.

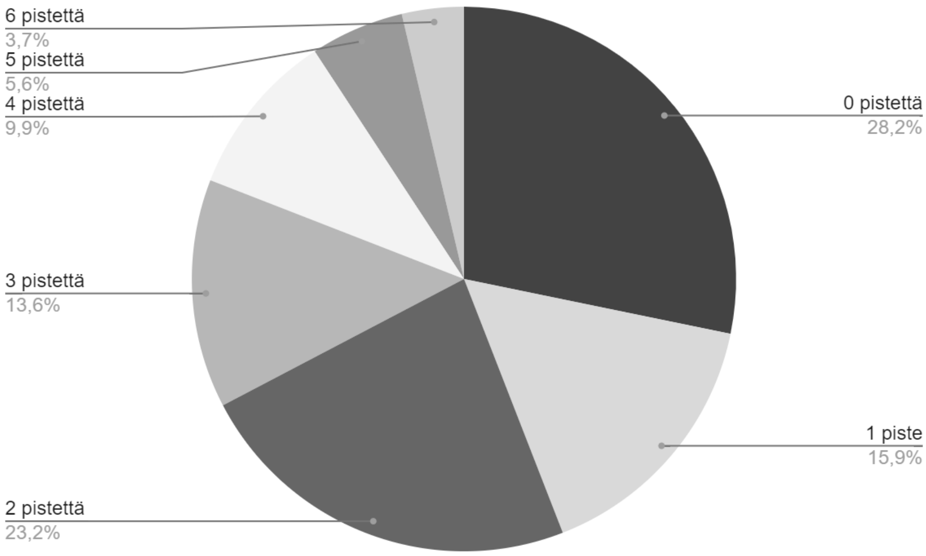


Kaavio 5.2. Keskimääräiset pistejakaumatulokset vuosien 2015-2018 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattafunktion kulkua ja/tai ääriarvoja koskevissa derivaattatehtävissä.

Kevään 2020 12 pisteen tehtävä 8 keräsi eniten opiskelijoita pistemäärän 4 kohdalle, minkä saavutti 48% tehtävään vastanneista opiskelijoista. Nollille jäi 15% opiskelijoista ja 5-6 pistettä eli noin puolet pisteistä sai noin 6,3% opiskelijoista. Pistemäärään 2 ylsi 7% opiskelijoista. Loput pistemäärät jäivät alle kolmen prosentin.

Taulukon 5.2 kolmanteen sarakkeeseen sijoittuvat sellaiset derivaattatehtävät, jotka eivät sopineet ensimmäiseen tai kolmanteen sarakkeeseen. Tehtävien painotus oli edeltäviä soveltavampaa tai niissä tarvittiin syvällisempää derivaatan ominaisuuksien tuntemista. Tällaisia tehtäviä oli yhteensä viisi kappaletta ja niistä neljä sijoittuu vuosien 2015-2018 ylioppilaskokeisiin. Nämä neljä tehtävää sisälsivät pääosin kuvaajien tulkintaa. Vuoden 2020 tehtävän 13 maksimipistemäärä oli 12 ja tehtävän tarkoituksena oli korjata derivaattalaskun virheellinen ratkaisu.

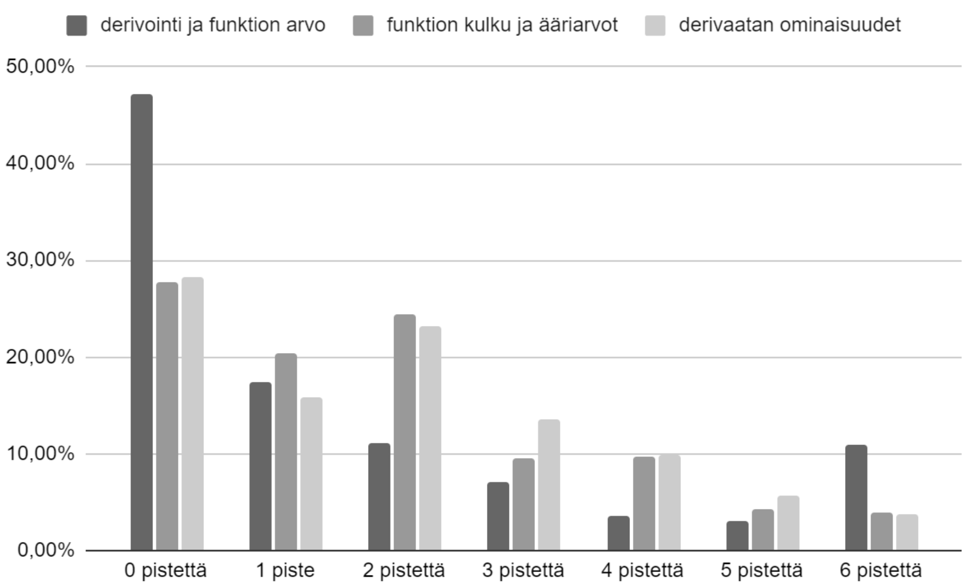
Kaikissa muissa paitsi yhdessä otoksen tehtävistä eniten saatu pistemäärä oli 0. Poikkeuksen tähän tekee kevään 2018 tehtävä 6, jossa eniten saavutettiin 2 pistettä. Kyseisessä tehtävässä saavutetut pistemäärät kuitenkin jäivät melko pieniksi, sillä 3 pistettä tai enemmän sai vain 29% tehtävään vastanneista. Vähiten opiskelijat olivat päässeet 5 tai 6 pisteeseen, kevään 2020 tehtävän kohdalla taas vähiten saatiin pistemääriä 10 ja 11. Vuosien 2015-2018 tehtävien keskimääräiset pistejakaumatulokset on esitelty alla olevassa kaaviossa 5.3.



Kaavio 5.3. Keskimääräiset pistejakaumatulokset vuosien 2015-2018 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden derivaatan ominaisuuksia koskevissa derivaattatehtävissä.

12 pisteen maksimipistemääräisiä derivaattatehtäviä oli tässä otoksessa yksi. Yli 85% tähän tehtävään vastanneista opiskelijoista sai 6 pistettä tai vähemmän, minkä myötä alle 15% on saanut yli puolet pisteistä. 29,3% opiskelijoista sai 0 pistettä ja yhteen pisteeseen jäi jopa 14%.

Edellä analysoitujen pistejakaumien keskiarvojen perusteella näyttäisi siltä, että kolmiluokkaisen tehtävätyyppijaottelun mukaan funktion derivointi ja sen arvon laskeminen pisteessä sujuu lyhyen matematiikan opiskelijoilta sekä huonoiten että parhaiten. Keskimääräisiä pistejakaumatuloksia vuosien 2015-2018 derivaattatehtävistä vertaileva kaavio 5.4 esitelty alla.



Kaavio 5.4. Vuosien 2015-2018 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien derivaattaosuustyyppien pistejakaumien vertailua prosenteittain.

5.1.3 Derivaattatehtävien pistejakaumat laatuluokittelun mukaan

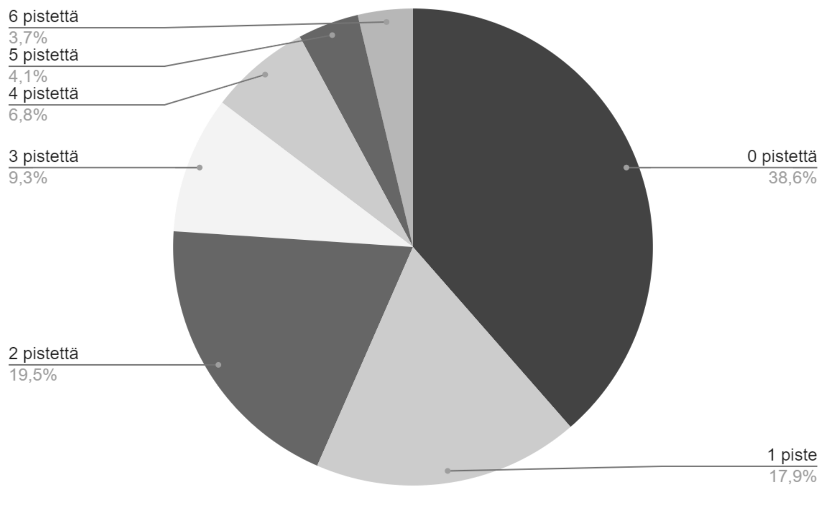
Vuosien 2015-2020 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeissa derivaattatehtäviä oli yhteensä 17 ja niistä vain yksi on luokiteltu perustehtäväksi taulukon 4.2 mukaan. Kyseinen tehtävä oli syksyn 2016 tehtävä 1 ja siten myös pakollinen tehtävä. Loput 16 tehtävää olivat soveltavia tehtäviä eikä abstrakteiksi luokiteltuja tehtäviä ollut ollenkaan. Käytetään pistejakaumien tulkinnassa apuna alla esiteltyä taulukkoa 5.3, josta nähdään vuosien 2015-2020 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeisiin osallistuneiden opiskelijoiden määrä.

K15	S15	K16	S16	K17	S17	K18	S18	K19	S19	K20
12048	5548	11204	4329	11433	4413	11383	5916	8807	3747	11165

Taulukko 5.3. Lyhyen matematiikan ylioppilaskokeisiin osallistuneiden opiskelijoiden määrä kokeittain.

Taulukon mukaan syksyn 2016 lyhyen matematiikan kokeeseen osallistui 4329 opiskelijaa ja kyseisen kokeen ensimmäiseen tehtävään vastasi jopa 4326 opiskelijaa. Näin ollen ainoastaan kolme kokeeseen osallistuneista opiskelijoista ei vastannut tähän perustehtäväksi luokiteltuun, pakolliseen tehtävään. Vain 178 opiskelijaa sai tehtävästä 0 pistettä ja jopa 1786 ylsi täysiin pisteisiin. 6 pistettä sai noin 41% opiskelijoista, kun taas nollille jäi vain noin 4%.

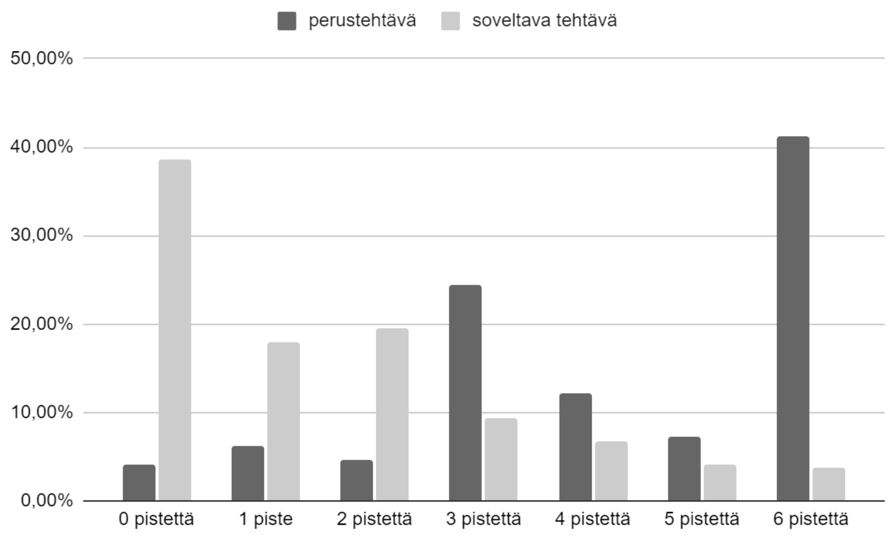
Tutkittaessa soveltavia tehtäviä jäljelle jää 16 tehtävän otos. Tarkastellaan ensin 6 pisteen tehtäviä, joita oli yhteensä 12 kappaletta. Näistä tehtävistä ainoastaan kaksi oli sellaisia, että suurin opiskelijamäärä on saanut tehtävästä enemmän kuin 0 pistettä. Nämä olivat syksyn 2016 tehtävä 12 ja kevään 2018 tehtävä 6. Kummassakin tehtävässä 2 pistettä on saavutettu useammin kuin 0 pistettä. Vuosien 2015-2018 soveltavien tehtävien keskimääräiset pistejakaumat on esitelty alla olevassa kaaviossa 5.5.



Kaavio 5.5. Vuosien 2015-2018 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden soveltavien derivaattatehtävien keskimääräiset pistejakaumatulokset.

12 pisteen maksimipistemäärän soveltavia tehtäviä oli yhteensä neljä kappaletta. Näistä tehtävistä kaksi olivat sellaisia, että eniten oli saatu 0 pistettä. Jäljelle jäävät kaksi tehtävää keräsivät eniten pistemääriä 2 ja 4. Syksyn 2019 kokeen tehtävässä 8 erot nollan ja kahden pisteen välillä olivat hyvin pienet, tehtävään vastanneiden määrään suhteutettuna reilusti alle 0,5% luokkaa. Kevään 2020 tehtävässä 8 taas erot olivat suurempia. 0 pistettä sai 567 opiskelijaa, kun taas 4 pistettä saavutti jopa 1794 opiskelijaa. Prosentuaalisesti tämä tarkoittaa, että 0 pistettä sai noin 15% opiskelijoista ja 4 pistettä taas melkein puolet tehtävään vastanneista. Muita pistemääriä oli saatu reilusti vähemmän edellisiin verrattuna.

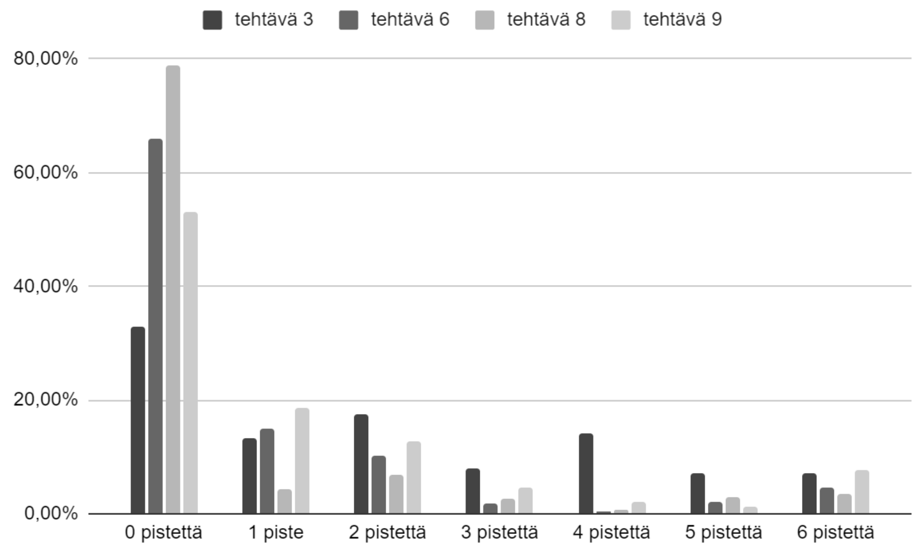
Edellä analysoitujen pistejakaumien ja pistejakaumien keskiarvojen perusteella näyttäisi siltä, että perustehtävä on hallittu selkeästi paremmin, kuin soveltavat derivaattatehtävät. Perustehtävästä on saatu eniten pistemääriä 3 ja 6 kun taas soveltavien tehtävien suurimmat saavutetut pistemäärät painottuvat pistemääriin 0, 1 ja 2. Perustehtävässä pistemääriä 4 ja 5 on kuitenkin saavutettu melko vähän. Tulokset on esitelty alla olevassa kaaviossa 5.6.



Kaavio 5.6. Vuosien 2015-2018 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien perus- ja soveltavien tehtävien pistejakaumien vertailua prosenteittain.

5.1.4 Derivaattatehtävien pistejakaumat vaikeusasteluokittelun mukaan

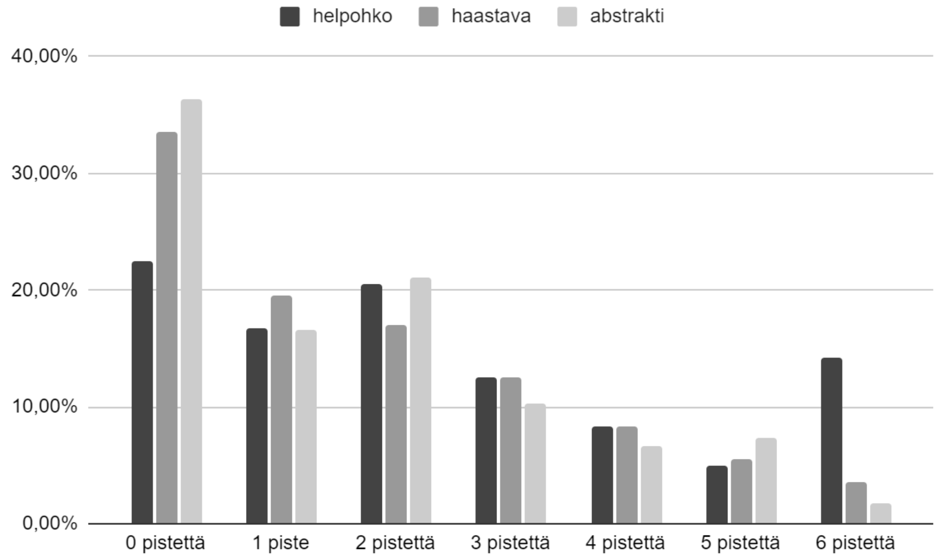
Tarkastellaan seuraavaksi, miten tehtävien vaikeusasteet näkyvät lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien pistejakaumissa. Paneudutaan ensin vuoden 2015 kokeiden derivaattatehtäviin. Tällöin koe oli yksiosainen ja tehtävät vaikeutuivat suurinpiirtein lineaarisesti. Otoksessa on neljä tehtävää, joista kevään tehtävät sijoittuvat paikoille 6 ja 9 ja syksyn tehtävät paikoille 3 ja 8. Alla olevaan kaavioon 5.7 on laskettu tehtävistä saatujen pistemäärien prosenttiosuudet suhteessa tehtävään vastanneiden opiskelijoiden määrään.



Kaavio 5.7. Vuoden 2015 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien pistejakaumien vertailua prosenteittain.

Kaavion perusteella näyttäisi siltä, että vaikeusasteluokittelu toteutuu, kun verrataan tehtävää 3 tehtävään 6. Tällöin 0 pisteen kohdalla tehtävän 3 palkki on alimpana ja tehtävän 6 palkki korkeammalla, eli tehtävästä 3 on saatu vähiten huonoimpia pisteitä. Sama toistuu myös 1 pisteen kohdalla. 2 pisteen kohdalla ja siitä eteenpäin palkit vaihtavat paikkaa eli 3. tehtävästä on saatu enemmän korkeampia pisteitä kuin tehtävästä 6. Samankaltainen ilmiö näyttäisi toteutuvan myös verrattaessa tehtäviä 3 ja 8, mutta vaihto tapahtuu jo ensimmäisen pisteen kohdalla. Tehtäviä 6 ja 8 verrattaessa hajonta on hieman erilaista. 0 ja 6 pisteen kohdalla tulos on arvatunlainen, mutta muiden pistemäärien välillä näkyy eroja. Tehtävän 9 pistejakauma näyttäisi olevan vähenemään päin asteikolla 0-5 pistettä, mutta nousee taas ylöspäin 6 pisteen kohdalla, saavuttaen muiden tehtävien jakaumiin verrattuna korkeimman tuloksen.

Vuoden 2016 kevään matematiikan ylioppilaskoe oli ensimmäinen kolmeen osaan jaettu koe. Tämä muutti vaikeusasteluokittelua huomattavasti, mitä tarkasteltiin aiemmin luvussa 5.1.1. Käytetään apuna kyseisessä luvussa laadittua taulukkoa 5.1, jossa määriteltiin nykyisen matematiikan ylioppilaskokeen arvioitu rakenne vaikeusasteittain. Tarkastellaan vuosien 2016-2018 kokeita, jolloin tehtävien maksimipistemäärä oli 6. Otoksessa on yhteensä yhdeksän tehtävää. Alla on esitelty kaavio 5.8, johon on sisällytetty derivaattatehtävien pistejakaumien keskiarvot vaikeusasteluokittelun mukaan neliportaisesti: helpohko, soveltava, haastava ja abstrakti.



Kaavio 5.8. Vuosien 2016-2018 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien keskimääräisten pistejakaumien vertailua vaikeusasteluokittelun mukaan prosenteittain.

Vuosien 2016-2018 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeissa ei ollut vaikeusasteluokittelun mukaisia soveltavia tehtäviä, joten keskitytään tarkastelemaan tehtäviä kolmiportaisen luokittelun mukaisesti: helpohko-haastava-abstrakti.

Kaavion perusteella vaikeusasteluokittelu näyttäisi pistejakaumien keskiarvojen perusteella toteutuvan siten, että hepohkoistal tehtävistä on saatu enemmän täysiä pisteitä, kuin haastavista tai abstrakteista tehtävistä. Myös 0 pisteen kohdalla vaikeusasteluokittelu näyttäisi toteutuvan, sillä abstrakteista tehtävistä 0 pistettä on saatu eniten ja helpohkoista taas vähiten.

Vuonna 2019 matematiikan ylioppilaskokeet muuttuivat kokonaan sähköisiksi ja nostivat tehtävien maksimipistemäärän 12:een. Tällöin derivaattatehtäviä on ollut yhteensä neljä kappaletta, joista kaksi on luokiteltavissa vaikeusasteeltaan soveltaviksi ja loput kaksi haastavaksi ja abstraktiksi. Soveltavissa tehtävissä eniten oli saatu pistemääriä 0, 4 ja 2. Kevään 2020 tehtävässä 8 pistemäärän 4 oli saanut miltei 48% opiskelijoista, kun saman vuoden syksyn 8. tehtävässä luku on vain noin 5%. Otoksen haastava tehtävä on ollut erityisen haastava, sillä 0 pistettä on saanut peräti yli 91% tehtävään vastanneista opiskelijoista ja vain noin prosentti on saanut tehtävästä 6 pistettä tai enemmän. Abstrakti tehtävä taas on ollut haastavaa helpompi, mutta kuitenkin soveltavia vaikeampi tehtävä. Kun soveltavista tehtävistä 0 pistettä oli saanut keskimäärin 20% opiskelijoista, niin abstraktin tehtävän vastaava luku on 29%. Täysiä pisteitä tutkiessa vaikeusasteluokittelu pätee myös, sillä kun soveltavasta tehtävästä noin 5% opiskelijoista sai täydet pisteet, niin abstraktista tehtävästä samat pisteet sai vain noin 3%.

Kaiken kaikkiaan paria poikkeusta lukuunottamatta näyttäisi siltä, että taulukon 5.1 vaikeusasteluokittelu toteutuu myös lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien pistejakaumissa.

5.1.5 Opiskelijoiden valitsemat derivaattatehtävät

Tarkastellaan seuraavaksi tehtävävalintoja vuosien 2015-2020 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtäviä koskien. Paneudutaan muun muassa siihen, kuinka paljon derivaattatehtäviä on valittu, millaisia tehtäviä on valittu eniten ja millaisia vähiten sekä sovelletaan näitä tietoja laatuluokitteluun ja tehtävien vaikeusasteisiin. Tulkinnassa on käytetty apuna taulukon 5.3 tietoja ylioppilaskokeisiin osallistuneiden opiskelijoiden kokonaislukumääristä.

Selkeästi suosituimmat tehtävät opiskelijamäärien perusteella ovat kevään 2016 tehtävä 4 sekä samaisen syksyn tehtävä 1, jotka ovat olleet pakollisia tehtäviä. Kevään tehtävässä jopa 96% oli tehnyt kyseisen tehtävän ja syksyn tehtävässä ainoastaan kolme kokeeseen osallistunutta opiskelijaa ei ollut vastannut tehtävään. Pakollisten tehtävien keskimääräinen valintaprosentti on noin 98%. Koska tehtävät eivät ole valinnaisia, ei tarkastella niitä tämän enempää. Huomattavan vähän taas oli valittu vuoden 2015 derivaattatehtäviä, joista kahden osallistujamäärä jäi alle 25%. Valinnaisten tehtävien keskimääräinen valintaprosentti oli noin 47%.

Taulukossa 5.2 on luokiteltu vuosien 2015-2020 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävät tehtävätyypeittäin tehtäviin, joiden derivaattaosuus painottuu:

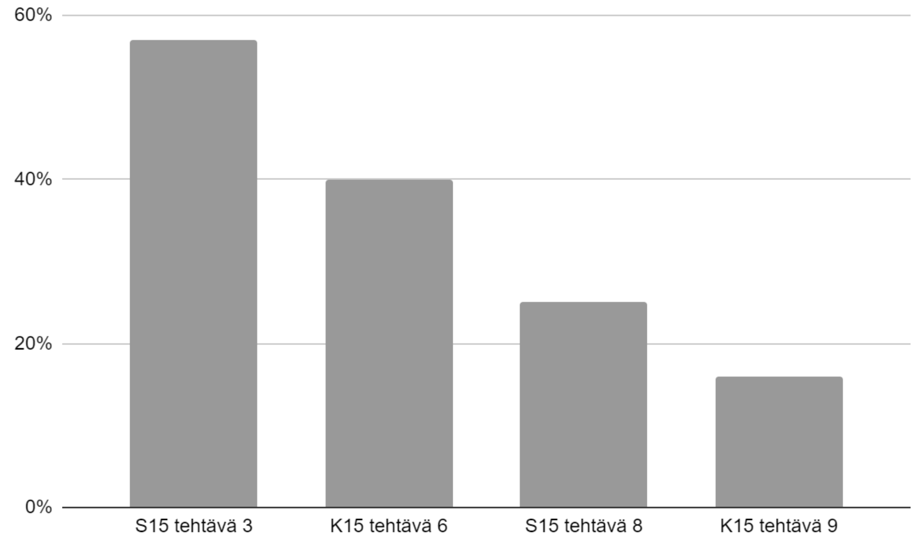
1) funktion derivointiin ja derivaattafunktion arvon laskemiseen tietyssä pisteessä,
2) funktion kulun ja/tai ääriarvojen tutkimiseen, tai
3) edeltäviä soveltavampaan tai muihin derivaatan ominaisuuksiin liittyvään laskentaan.

Luvun 5.1.2 analyysin perusteella näistä luokista ensimmäinen oli kerännyt sekä parhaat että huonoimmat pistemäärät. Kyseisen luokan tehtäviä oli valinnut keskimäärin 41% opiskelijoista. Toisen luokan vastaava valintamäärä on 52% ja viimeisen luokan tehtäviä taas oli valinnut keskimäärin 56%. Kovin suuria eroja luvuissa ei ole, mutta näyttäisi kuitenkin siltä, että eniten opiskelijoita ovat miellyttäneet tehtävät, jotka liittyvät soveltavampaan derivaatan osaamiseen. Myös funktion kulun ja/tai ääriarvojen tutkiminen on tullut valituksi yli puolilla opiskelijoista.

Luvussa 4.2.2 tehdyn laatuluokittelun perusteella lyhyen matematiikan vuosien 2015-2020 derivaattatehtäviä on ollut yhteensä 17 ja näistä vain yksi on luokiteltu perustehtäväksi muiden luokittuessa soveltaviksi tehtäviksi. Koska perustehtäväksi luokiteltu syksyn 2016 tehtävä 1 oli myös pakollinen tehtävä, oli sen valinnut liki 100% opiskelijoista. Muiden valinnaisten 12 derivaattatehtävän keskimääräinen valintaprosentti on noin 59%.

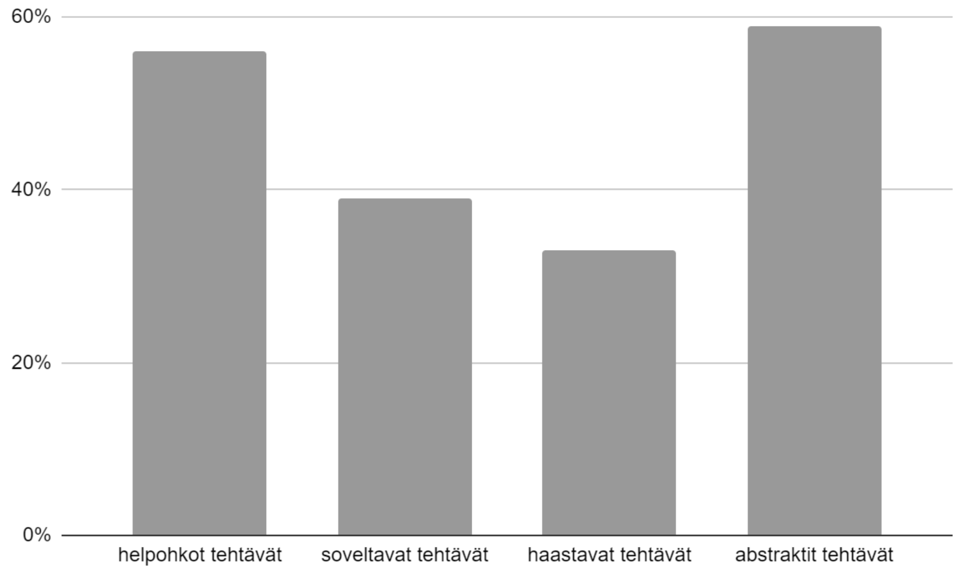
Jaetaan vaikeusasteluokittelun tutkiminen kahteen osaan; kokeet ennen vuotta 2016 ja kokeet sen jälkeen. Tämä on mielekästä siksi, että vuonna 2016 otettiin käyttöön kolmiosainen matematiikan ylioppilaskoerakenne, jonka vaikeusaste ei vaihtele lineaarisesti.

Vuoden 2015 kokeissa derivaattatehtävän vaikeusaste näyttäisi vaikuttavan opiskelijoihin tehtävävalinnan suhteen siten, että alkupään helpompia tehtäviä on valittu useammin kuin loppupään vaikeampia tehtäviä. Tehtävien keskimääräiset valintaprosentit on esitelty alla olevassa kaaviossa 5.9.



Kaavio 5.9. Vuoden 2015 ylioppilaskokeiden lyhyen matematiikan derivaattatehtävien keskimääräiset valintaprosentit.

Käytetään vuosien 2016-2020 derivaattatehtävien jakaumia tutkiessa apuna kaaviota 5.1, jossa on arvioitu kokeiden tehtäväpaikkojen vaikeusasteet. Tutkitaan tehtävien vaikeusastetta luvun 5.1.4 tapaan siten, että jaetaan vaikeusasteet edelleen neliportaisesti luokkiin helpohko, soveltava, haastava ja abstrakti. Luokkien keskimääräiset valintaprosentit on esitelty alla olevassa kaaviossa 5.10.



Kaavio 5.10. Vuosien 2016-2020 ylioppilaskokeiden lyhyen matematiikan derivaattatehtävien keskimääräiset valintaprosentit.

Kaavion mukaan näyttäisi siltä, että abstrakteja tehtäviä on valittu useimmin. Tähän tulokseen kuitenkin vaikuttaa se, että kokeen B2-osaan sisältyy kaksi abstraktia tehtävää ja kyseisen osan tehtävistä tuli valita kolme. Näin ollen opiskelijoiden on ollut pakko valita tehtäväkseen ainakin yksi abstrakti tehtävä. Helpohkot tehtävät ovat myös olleet suosittuja ja tämän jälkeen soveltavat ja haastavat tehtävät seuraavat prosenttimäärin melko suoraviivaisesti.

5.2 Pitkän matematiikan tehtävien pisteytykset ja valinnat

Tarkastellaan seuraavaksi pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien pisteytyksiä ja pistejakaumia, sekä opiskelijoiden tekemiä tehtävävalintoja vuosina 2015-2020. Kokeissa oli derivaattatehtäviksi luokiteltavia tehtäviä yhteensä 33 kappaletta, joista kahdeksan oli sellaisia, mitkä oli mahdollista ratkaista muulla tavalla kuin derivaattaa apuna käyttäen. Näistä kahdeksasta tehtävästä seitsemän olivat tehtävänannoiltaan sellaisia, että voidaan olettaa suurimman osan opiskelijoista valinneen ratkaisuunsa juuri derivaatan sovellukset. Ulkopuolelle jäänyt yksi tehtävä oli syksyn 2019 kokeen tehtävä 10, jossa tarkasteltiin pallon pomppujen korkeuksia määriteltyä pomppufunktiota $h(x)$ apuna käyttäen. Tarkastellaan tässä luvussa siis yhteensä 32 tehtävää, jotka luokitellaan derivaattatehtäviksi.

5.2.1 Derivaattatehtävien pisteytykset

Derivaatan ilmentyminen pitkän matematiikan ylioppilaskoetehtävän ratkaisussa on tässä tutkielmassa määritelty siten, että sen tulee sisältää suoraan derivaatan käyttöä tai liittyä vahvasti sen sovelluksiin. Esimerkiksi derivaatta ja sen nollakohtien ratkaiseminen tulkitaan derivaatan ilmenemiseen tehtävässä. Myös esimerkiksi derivaattafunktion kulun tarkasteleminen tulkitaan derivaattaan liittyväksi, vaikka itse funktion kulun tarkastelu ei laskennallisesti derivaattaa vaadikaan. Käydään selvyyden vuoksi läpi kevään 2017 pitkän matematiikan tehtävän 7 tehtävänanto ja malliratkaisu sekä sen derivaattaosuudesta jaossa olevat pisteet. Tehtävän malliratkaisussa on käytetty apuna YTL:n hyvän vastauksen piirteitä ja ratkaisun derivaattaosuudet on korostettu punaisella fontilla.

K17 tehtävä 7

Suunnittele sellainen suoran lieriön muotoinen juomalasi, jonka pohjan paksuus on $5,0\ mm$, seinämän paksuus $2,0mm$, vetoisuus $2,0dl$ ja jonka valmistamiseen tarvitaan mahdollisimman vähän lasia. Ilmoita lasin korkeus ja ulkopuolelta mitattu pohjan halkaisija.

Ratkaisu:

$2,0dl = 200000mm^3$
Siis kappaleen tilavuus: $\pi r^2 h = 200000$
Saadaan $h = \frac{200000}{\pi r^2}$

Pohjan tilavuus: $\pi(r + 2)^2 \cdot 5 = 5\pi(r + 2)^2$
Seinämän tilavuus: $\pi[(r + 2)^2 - r^2] \cdot h = \pi(4r + 4)$
Siis lasia tarvitaan: $V(r) = \pi(4r + 4) \cdot \frac{200000}{\pi r^2} + 5\pi(r + 2)^2$

$V'(r) = 800000(-r^2 - 2r^{-3}) + 10\pi(r + 2) = 0$ // 1 piste
Joten $r = \sqrt[3]{\frac{800000}{\pi}} \approx 29,42$ // 1 piste

Halkaisija $2r = 2 \cdot 29,42 \approx 62,8$ ja korkeus $h = \frac{200000}{\pi r^2} = \frac{200000}{\pi \cdot 29,42^2} \approx 78,6$

Siis juomalasin halkaisija on noin $62,8mm(= 6,28cm)$ ja korkeus noin $78,6mm(= 7,86cm)$.

Tehtävän derivaattaosuus keskittyy rakennetun funktion derivointiin ja sen nollakohtien etsimiseen. Tehtävän derivaattaosuus on ollut kahden pisteen arvoinen, mikä tarkoittaa noin 33% koko tehtävän maksimipistemäärästä. Käydään läpi vertailun vuoksi toisentyyppinen derivaattatehtävä keväältä 2018.

K18 tehtävä 13

Funktio $f(x)$ määritellään kaavalla

$$f(x) = p(x)cos(\frac{1}{x}),\ kun\ x > 0,$$
$$f(x) = ln(1 - x),\ kun\ x \leq 0,$$

missä $p(x) = ax^2 + c$ on toisen asteen polynomi. Onko olemassa sellaisia kertoimia a ja c, että $f(x)$ on derivoituva?

Ratkaisu:

f derivoituva kaikkialla $x \neq 0$.

Vasemmanpuoleinen derivaatta pisteessä $x = 0$: $D(ln(1 - x)) = \frac{1}{x-1} \to 1$, kun $x \to 0_-$.

Oikeanpuoleinen derivaatta pisteessä $x = 0$ lasketaan osamäärällä: $\frac{p(x)cos\frac{i}{x} - f(0)}{x} = \frac{p(x)}{x}cos\frac{1}{x}$.

Jos $p(0) \neq 0$, niin $\frac{p(x)}{x} = ax \to \pm\ \infty$, jolloin derivaattaa ei ole olemassa.
Jos $p(0) = 0$, niin $\frac{p(x)}{x} = ax \to 0$, kun $x \to 0_+$.

Koska vasemman- ja oikeanpuoleiset derivaatat ovat yhtä suuret, ei funktio ole derivoituva, joten kertoimia a ja c ei ole olemassa.

Yllä esitelty tehtävä 13 on soveltava ja vaatii derivaatan ominaisuuksien syvällisempää ymmärrystä. Koko tehtävän malliratkaisu pyörii funktion derivaatan käsitteen ympärillä, joten tehtävästä saatava maksimipistemäärä voidaan laskea kokonaan tehtävän derivaattaosuudesta saataviksi pisteiksi.

Kuten lyhyenkin matematiikan ylioppilaskokeissa, myös pitkän matematiikan derivaattatehtävistä on annettu pisteitä laajalla skaalalla 0-12. Derivaattaa on siis tarvittu tehtävissä sekä apukeinona että koko tehtävän ratkaisussa oleellisena osana, kuten edellä esitellyistä tehtävistäkin voidaan nähdä. Vuoden 2019 ylioppilaskokeiden sähköistymisen myötä kokeiden maksimipistemäärä nousi 12:een aikaisemmasta 6 pisteen rajasta. Vuosina 2015-2018 derivaattatehtävien derivaattaosuuksista on ollut jaossa keskimäärin noin 3,8 pistettä, mikä on noin 63% yksittäisen derivaattatehtävän kokonaispistemäärästä. Vuosien 2018-2020 vastaavat luvut taas ovat noin 5,4 pistettä ja 46%. Derivaattatehtävien derivaattaosuus on siis laskenut jonkin verran vuoden 2019 vaihteessa. Tämä johtunee siitä, että ylioppilaskokeiden sähköistyessä ylioppilaskoetehtäviin on mielekästä sisällyttää enemmän eri matematiikan osa-alueiden sovelluksia, sillä B1- ja B2-osien sallittujen apuvälineiden myötä suoraviivaiset tehtävät ovat karsiutuneet kokeen A-osan puolelle. Suuri osa pitkän matematiikan derivaattatehtävistä on sellaisia, että niiden ratkaisut vaativat derivaatan hallintaa päästäkseen tehtävässä eteenpäin. Myös tämä osaltaan kompensoi derivaattaosuuksien pistemäärien laskua.

Merkittävä osa pitkän matematiikan vuosien 2015-2020 tehtävistä ovat rakenteeltaan sellaisia, joissa derivoidaan funktio, lasketaan sen nollakohdat ja tutkitaan derivaattafunktion kulkua tai ääriarvokohtia. Tällaisia tehtäviä oli otoksessa yhteensä 13 ja niiden derivaattaosuuksista oli jaossa 2-4 pistettä. Myös derivoidun funktion muiden arvojen laskeminen yksittäisissä pisteissä oli tehtävissä yleistä. Muutamassa otoksen derivaattatehtävässä tutkittiin derivoituvuutta erotusosamäärää apuna käyttäen. Tällaiset tehtävät ovat olleet derivaattaosuuksiltaan tehtävän maksimipistemäärän arvoisia. Parissa tehtävässä tutkittiin funktiota, jonka ratkaisu vaati sisäfunktion derivaatan tai käänteisfunktion käsitteen tuntemista. Tehtävistä yhteensä 25 oli sellaisia, joissa piti derivoida jokin annettu funktio. Pelkästä funktion derivoinnista oli jaossa 1-2 pistettä.

Edellisissä luvuissa määritelty derivaattatehtävien laatuluokittelu jakaa tehtävät kolmeen luokkaan; perustehtäviin, soveltaviin tehtäviin ja abstrakteihin tehtäviin. Pitkän matematiikan vuosien 2015-2020 ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien 32 tehtävän otoksesta kolme oli perustehtäviä ja yksi luokiteltavissa abstraktiksi tehtäväksi. Loput 28 tehtävää luokitellaan soveltaviksi tehtäviksi. Perustehtävät oli sijoitettu tehtäväpaikoille 1 ja 2, ja niissä testattiin funktion derivointia sekä derivaattafunktion arvon laskemista tietyssä pisteessä. Kyseisten tehtävien derivaattaosuudet olivat 100%, 33% ja 50%. Abstraktiksi luokiteltu tehtävä oli syksyn 2018 kokeen tehtävä 13, jonka a-kohdassa logaritmia sisältävään yhtälöön tuli ratkaista sellainen vakion arvo, että yhtälöllä on tasan yksi ratkaisu. B-kohdassa yhtälöä laajennettiin entisestään ja pyydettiin taas määrittämään vakion arvo. Tehtävä painottui kokonaan derivaattaan ja sen sovelluksiin ja oli siten derivaattaosuudeltaan 6 pisteen arvoinen.

Vielä vuonna 2015 ylioppilaskoe oli 15 tehtävän mittainen, eikä sitä oltu jaoteltu erillisiin osiin. Tässä ylioppilaskokeen rakenteessa ensimmäiset 13 tehtävää olivat 6 pisteen tehtäviä ja viimeiset jokeritehtäviä, joista oli mahdollista saada yhteensä 9 pistettä. Kokeiden vaikeusasteen oli tarkoitettu nousevan suurin piirtein lineaarisesti siten, että kokeen ensimmäinen tehtävä on helpoin ja viimeinen vaikein. Vuoden 2015 pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa ei ollut derivaattatehtäviä 9 pisteen jokeritehtävinä. Syksyn 2015 kokeessa ei derivaattatehtäviä ollut laisinkaan. Sen sijaan keväällä derivaattatehtäviä oli kolme ja ne olivat kaikki soveltavan tehtävän luokkaan sopivia. Derivaattatehtävät sijoittuivat tehtäväpaikoille 9, 10 ja 13, ja ovat siten kaikki olleet kokeen haastavammalla puoliskolla. Näiden tehtävien derivaattaosuuksista on jaettu pisteitä 2, 1 ja 6, mikä on keskimäärin noin 67% koko tehtävän maksimipistemäärästä. Kevään 2015 kokeen derivaattatehtävät käsittelivät suurimman mahdollisen tilavuuden etsintää, kappaletta kuvaavan derivaattafunktion sisältävän funktion pyörähdyskappaleen tilavuuden laskentaa, sekä derivoituvuuden tutkintaa erotusosamäärää apuna käyttäen.

Keväällä 2016 siirryttiin uuteen matematiikan ylioppilaskokeen rakenteeseen, joka koostuu kolmesta osasta. Kokeen A-osasta tulee ratkaista kaikki neljä tehtävää, B1-osan viidestä tehtävästä valitaan tehtäväksi kolme ja B2-osan neljästä tehtävästä kolme. Tehtävät vaikeutuvat edellä mainittujen kolmen osan sisällä suurin piirtein lineaarisesti edellisessä luvussa esitellyn taulukon 5.1 mukaisesti.

Syvennytään seuraavaksi tarkastelemaan vuosien 2016-2018 pitkän matematiikan ylioppilaskokeita, jolloin kokeen rakenne on ollut kolmiosainen ja jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on ollut 6. Tällöin kokeiden A-osissa on ollut yhteensä 10 derivaattapainotteista tehtävää. Näistä syksyn 2017 ja kevään 2018 tehtävät ovat olleet tehtäväpaikoilla 1. Ensimmäisessä tehtävänä oli laskea yksinkertaisten funktioiden derivaattafunktioita ja pisteitä oli jaossa yhteensä 6. Toiseksi mainittu tehtävä sisälsi derivaattaa vain tehtävän b-osiossa, jossa jaossa oli 2 pistettä ja tarkoituksena oli laskea funktion derivaatta ja sen arvo annetussa pisteessä. Tehtävät voidaan intuitiivisesti todeta melko helpoiksi. Tehtäväpaikalla 3 on ollut keväällä 2018 derivaattaosuudeltaan 4 pisteen arvoinen tehtävä, jossa tarkoituksena on ollut määrittää funktion suurin ja pienin arvo annetulla välillä. Tutkittava funktio on trigonometrinen, joten sen derivointi ja ääriarvojen tutkiminen on jo hieman haastavampaa. Vuosina 2016-2018 kokeiden A-osien viimeisillä tehtäväpaikoilla derivaattatehtäviä on ollut yhteensä kolme. Kevään ja syksyn 2016 neljänsien tehtävien tehtävänannot sisälsivät kuvat funktioiden kuvaajista. Kuitenkin vain kevään 2016 tehtävän kuvaaja oli ratkaisun kannalta oleellinen, sillä tehtävässä oli tarkoituksena määrittää kyseisen derivaattafunktion sekä sitä vastaavan funktion ominaisuuksia kuvan perusteella. Syksyn 2016 tehtävänannon kuva oli lähinnä havainnollistus tehtävään, jossa pyydettiin laskemaan paraabelin sisään mahtuvan suurimman mahdollisen suorakulmion pinta-ala. Syksyn 2017 tehtävässä 4 piti laskea ja sieventää hieman monimutkaisempien funktioiden derivaattafunktiot ja niiden arvot määrätyissä pisteissä. Näiden tehtävien derivaattaosuuksista oli jaossa maksimissaan 6, 4 ja 6 pistettä.

Vuosien 2016-2018 pitkän matematiikan B1-osissa on ollut yhteensä kolme derivaattatehtävää, joista yksi sijoittui tehtäväpaikalle 7 ja loput kaksi paikalle 9. Kevään 2017 tehtävä 7 oli perinteinen derivaattatehtävä, jossa piti suunnitella tietynlainen juomalasi, jonka valmistamiseen kuluisi mahdollisimman vähän lasia. Tehtävän derivaattaosuus keskittyi rakennetun funktion derivointiin ja sen nollakohtien tutkimiseen, mistä jaossa oli 2 pistettä. Tehtäväpaikan 9 tehtävät olivat keväiden 2016 ja 2018 kokeissa. Kummankin tehtävän idea perustui derivoituvuuteen ja sen tutkimiseen, pisteitä oli jaossa 6 ja 3.

B2-osiin oli sisällytetty jopa seitsemän derivaattatehtävää vuosina 2016-2018. Niistä yksi oli helpoimmalla tehtäväpaikalla 10 ja loput kuusi tehtävää jaettuna tasaisesti paikoille 11, 12 ja 13. Kevään 2017 tehtävä 10 on derivaattaosuudeltaan täysien 6 pisteen arvoinen. Tehtävänanto esitteli kaksi virheellistä ratkaisua yhdistetyn funktion derivaatan laskentaan ja tarkoituksena oli selittää ratkaisujen virheet ja tarjota korjattu ratkaisu. Kevään 2016 tehtävä 11 on perinteinen derivaattatehtävä, jossa tuli suunnitella mahdollisimman halpa peltitölkki, kun materiaalien hinta oli annettu. Derivaattaosuudesta pisteitä oli mahdollista saada enintään 2. Kevään 2018 tehtäväpaikan 11 tehtävän b-kohdassa taas oli jaossa enintään 3 pistettä, kun tarkoituksena oli keksiä funktio $g(x) \geq 0$, jonka derivaatalla on täsmälleen kaksi nollakohtaa. Syksyn 2017 tehtävässä 12 laskettiin käänteisfunktion derivaattaa ja perusteltiin graafisesti edellistä tulosta. Tehtävä oli derivaattaosuudeltaan kuuden pisteen arvoinen. Seuraavan kevään kokeen tehtävä 12 nojasi käänteisfunktioiden lisäksi logaritmeihin ja tehtävänä oli osoittaa näistä koostuvan funktion vähenevyys. Derivaattaa käytettiin ainoastaan a-kohdassa, josta jaossa oli 3 pistettä. B2-osan ja koko ylioppilaskokeen viimeisellä paikalla on vuosina 2016-2018 ollut kaksi derivaattatehtävää. Nämä tehtävät sijoittuvat vuoden 2018 keväälle ja syksylle. Kevään tehtävässä tuli tutkia paloittain määritellyn funktion derivoituvuutta ja syksyn aiemmin abstraktiksi luokitellussa tehtävässä taas tuli ratkaista logaritmiyhtälöön sellainen vakion arvo, että yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu. Koko tehtävä liittyi derivaattaan ja sen soveltamiseen, joten derivaattaosuuden pisteet nousivat täyteen 6:een.

Vuoden 2019 matematiikan ylioppilaskokeiden sähköistyminen nosti kokeiden tehtävien maksimipistemäärät 12:een aikaisemman 6 sijaan. Vuosina 2019-2020 pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa oli yhteensä 10 derivaattatehtävää, joista neljä oli sijoitettuna pakolliseen A-osaan ja loput viisi melko tasaisesti B1- ja B2-osiin. Syksyn 2019 tehtävä 2 ja kevään 2020 tehtävä 3 koskivat derivaattaa ja integraalia. Ensimmäisen derivaattaosuudesta oli jaossa 6 pistettä, kun taas toisesta oli mahdollista kerryttää 4 pistettä. A-osan haastavimmalta tehtäväpaikalta 4 löytyvät tehtävät olivat selkeästi soveltavampia edellisiin verrattuna. Syksyn 2019 tehtävän ensimmäisessä osassa derivaattaa käsiteltiin trigonometrisen funktion ääriarvojen löytämisen muodossa. Pisteitä tämän derivaattaosuudesta oli mahdollista saada enintään 3. Kevään 2020 tehtävä taas oli derivaattaosuudeltaan 5 pisteen arvoinen. Tehtävänanto pyysi määrittämään pisteen etäisyyden origosta, kun piste toteuttaa määrätyn epäyhtälön.

Kokeiden B1-osissa vuosina 2019-2020 oli yhteensä kolme derivaattapainotteista tehtävää. Yksi näistä oli tehtäväpaikalla 6 keväällä 2020. Tehtävä käsitteli pisteeseen piirrettyjä tangentteja ja derivaattaosuuden pisteitä oli jaossa enintään 4. Loput kaksi tehtävää oli sijoitettu B1-osan viimeiselle paikalle. Syksyn 2019 tehtävässä 9 tuli tutkia funktion derivoituvuutta ja kevään 2020 vastaavassa taas käänteisfunktion derivaattaa. Pisteitä näiden tehtävien derivaattaosuuksista annettiin enintään 2 ja 5.

Vuosien 2019-2020 pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden B2-osiin oli sisällytetty kaksi derivaattatehtävää tehtäväpaikoille 11 ja 12. Molemmat tehtävät olivat kevään 2019 kokeessa. Tehtävässä 11 tuli osoittaa, että määritellyt funktiot toteuttavat ehdon $f(x) = g(x)$ siten, että yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu ja määrittää kyseinen ratkaisu. Tehtävän ratkaisussa käytettiin laajasti derivaattaa, joten sen derivaattaosuudesta oli saatavilla täydet 12 pistettä. Tehtävä 12 oli suhteellisen laaja geometriaan liittyvä, kaksinkertaisen derivoinnin vaativa tehtävä. Kuitenkin sen derivaattaosuus jäi neljään pisteeseen.

5.2.2 Derivaattatehtävien pistejakaumat tehtävätyypin mukaan

Tarkastellaan seuraavaksi pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien pistejakaumia. Tutkitaan, minkä tyyppisistä tehtävistä on saatu eniten tai vähiten pisteitä ja näkyvätkö edellä määritellyt laatu- ja vaikeusasteluokittelut tehtävistä saaduissa pistemäärissä.

Pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa oli vuosina 2015-2020 yhteensä 32 derivaattatehtävää, joiden intuitiivisin ratkaisutapa sisälsi derivaatan hyödyntämistä. Näistä tehtävistä jopa 18 olivat sellaisia, joissa suurin määrä opiskelijoista oli saanut tehtävästä 0 pistettä. Tämä tarkoittaa sitä, että noin 56% opiskelijoista oli jäänyt yksittäisissä tehtävissä nollapisteille. Lyhyen matematiikan vastaava lukema oli 70%. Huomionarvoista on, että vuoden 2015 kokeissa kaikki kolme derivaattatehtävää olivat keränneet suurimmat opiskelijamäärät pisteen 0 kohdalle. Vuosien 2016-2018 kolmiosaisessa kokeessa eniten saatu pistemäärä nollan jälkeen oli neljässä tehtävässä 6 ja toiseksi yleisin pistemäärä kolmessa tehtävässä 1. Pistemäärää 2 saatiin eniten kahdessa tehtävässä ja 3 pistettä yhdessä. Vuosien 2019-2020 kokeissa, jossa tehtävien maksimipistemäärä nousi 12:een, 0 jälkeen eniten saavutettu pistemäärä oli täydet 12 pistettä, joka saavutettiin kahdessa tehtävässä useimmin. Tämän lisäksi yhdessä tehtävässä eniten saatiin 1 piste ja yhdessä tehtävässä 2 pistettä.

Vuoden 2015 kokeiden kolmessa tehtävässä vähiten opiskelijoita sai pistemääriä 4 ja 5. Vuosien 2016-2018 kokeiden tehtävissä taas vähiten saavutettiin 2 ja 5 pistettä. Ainoastaan kahdessa 18:sta tehtävästä vähiten saavutettu pistemäärä oli 0. Vuosien 2019-2020 kokeiden 11 derivaattatehtävistä taas kymmenessä tehtävässä saatiin vähiten 6 tai enemmän pistemääriä. Jäljelle jääneen yhden tehtävän vähiten saavutettu pistemäärä oli 1.

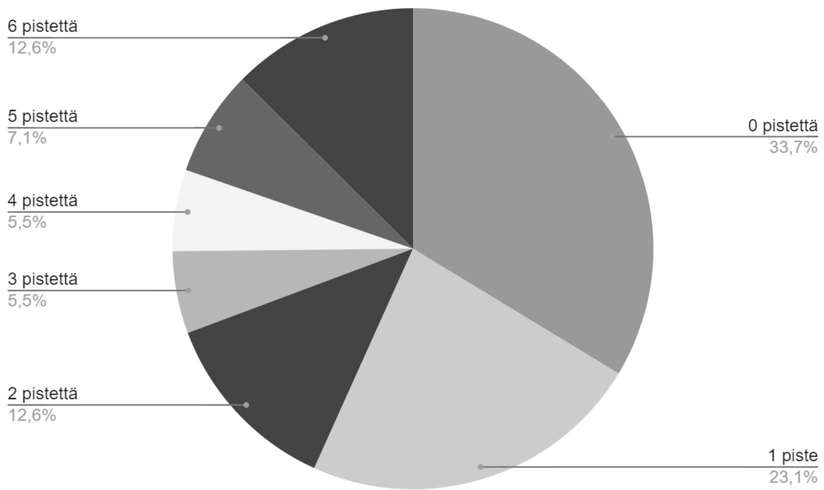
Jaotellaan karkea viisiosainen luokittelu derivaattatehtäville niiden derivaattaosuuden sisällön mukaisesti, jotta voidaan tutkia näiden derivaatan osa-alueiden ja tehtävätyyppien hallintaa pistejakaumien perusteella. Jokainen tehtävä asetetaan siihen sopivimpaan luokkaan. Tehdään jaottelu seuraavan taulukon mukaisesti:

ideaalitilanteen etsiminen funktion derivaatan sekä sen nollakohtien ja ääriarvojen avulla	**yksittäisen funktion derivointi**	**derivoituvuuden tutkiminen**	**derivaattafunkti on ominaisuuksien tutkiminen (funktion kulku, ääriarvot tai tietty määrä nollakohtia)**	**edeltäviä soveltavampi tai vaikeampien funktioiden derivaattaan liittyvä laskenta**
K15 9	K15 10	K15 13	K16 4	S17 12
K16 11	K17 10	K16 9.2	S17 4	S18 4
S16 4	S17 1	K18 13	K18 3	K19 12
K17 7	K18 1		K18 11	K20 9
S18 7	K18 9		K18 12	
K20 3	K19 3		S18 13	
K20 4	K20 13		K19 3	
K20 6			K19 11	
			S19 4	
			S19 9	

Taulukko 5.4. Pitkän matematiikan vuosien 2015-2020 ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien derivaattaosuuksien mukainen luokittelu tehtävittäin.

Tarkastellaan ensin taulukon 5.4 ensimmäistä saraketta, johon on sijoitettu perinteiset derivaattatehtävät, joissa etsitään kuvailtu ideaalitilanne funktion derivaatan nollakohtien ja ääriarvojen avulla. Tällaisia tehtäviä vuosien 2015-2020 pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa on ollut yhteensä kahdeksan, joista kolmen maksimipistemäärä on ollut 12 ja loppujen viiden paras saavutettavissa oleva pistemäärä 6. Tarkastellaan näitä erikseen.

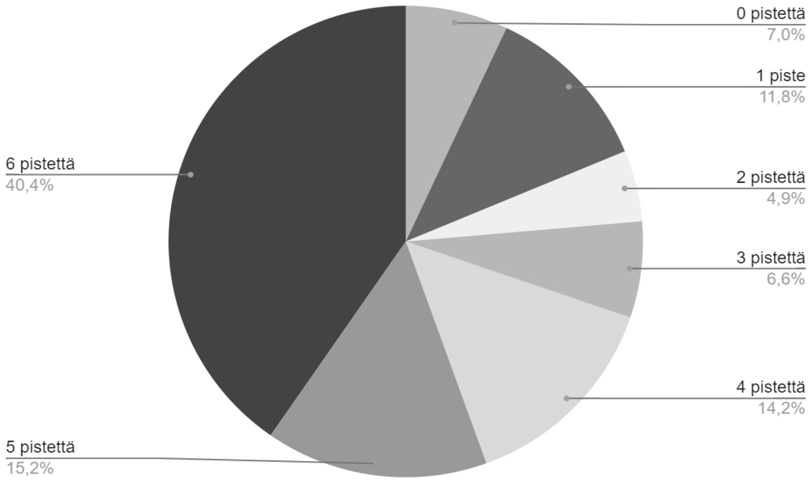
Tutkittaessa vuosien 2015-2018 tehtäviä, suurimman poikkeuksen yleiseen jakaumaan tekee kevään 2016 tehtävä 11, jossa eniten saavutettu pistemäärä oli 2, kun muissa tehtävissä selkeästi eniten oli saatu pistemäärää 0. Tehtävässä 11 noin 30% vastanneista sai 2 pistettä, kun vain 18% jäi nollille. Muissa tehtävissä 0 pistettä on saanut noin 37-62% tehtäviin vastanneista opiskelijoista. Kaikissa tehtävissä vähiten on saatu pistemääriä 2, 3 ja 4. Hajontaa esiintyy jonkin verran. Keskimääräiset pistejakaumatulokset on esitelty alla olevassa kaaviossa 5.11.



Kaavio 5.11. Keskimääräiset pistejakaumatulokset vuosien 2015-2018 pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävissä, jotka painottuvat ideaalitilanteen etsintään funktion derivaatan nollakohtien ja ääriarvojen avulla.

12 pisteen maksimipistemääräisiä tehtäviä tässä tehtävätyypissä oli vuosina 2015-2018 yhteensä kolme kappaletta, jotka kaikki sijoittuvat kevään 2020 kokeeseen. Kokeen 3. tehtävän eniten saatu pistemäärä oli 1, jonka sai noin 18% tehtävään vastanneista. 4. tehtävän vastaava pistemäärä oli 0, johon joutui tyytymään jopa 39% opiskelijoista. Samaisessa tehtävässä vähiten saatu pistemäärä oli 12. Kokeen 6. tehtävässä taas eniten saatiin pistemäärää 2, mutta sen sai vain noin 10% tehtävään vastanneista. Tehtävissä 3 ja 6 vähiten oli saatu pistemääriä 7 ja 8. Jopa 69% tehtäviin vastanneista opiskelijoista sai vähemmän kuin 6 pistettä, jolloin 6 pistettä tai enemmän sai vain 31% opiskelijoista. Pistejakaumien perusteella otoksen vaikeimmassa tehtävässä 4 jopa yli 90% opiskelijoista sai tehtävästä alle 6 pistettä.

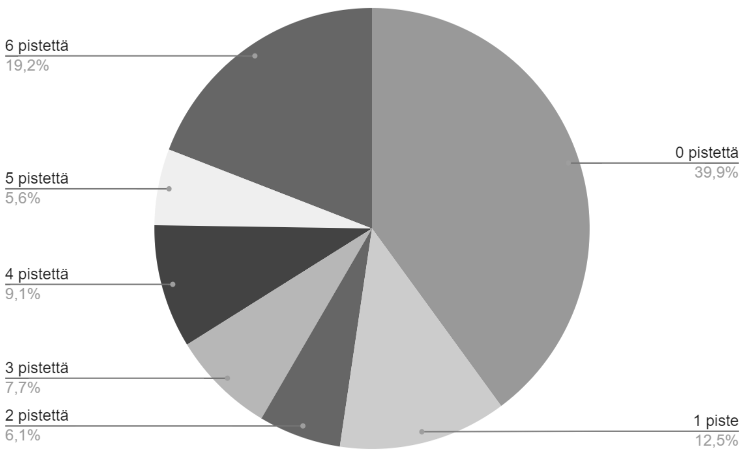
Tarkastellaan seuraavaksi taulukon 5.4 toista saraketta, johon on sijoitettu ne derivaattatehtävät, joiden derivaattaosuus perustuu pelkkään funktion derivointiin. Otoksessa on yhteensä seitsemän tehtävää, joista ensimmäiset viisi ovat olleet 6 pisteen tehtäviä. Tutkitaan näitä viittä tehtävää ensin. Vuoden 2018 tehtävässä 9 eniten saavutettu pistemäärä oli 1, kun taas kaikissa muissa tehtävissä eniten oli saatu täysiä pisteitä. Vähiten saadut pistemäärät vaihtelivat tehtävien mukaan. Suurinta hajontaa näkyy kevään 2018 tehtävien 1 ja 9 välillä. Tehtävässä 1 vain noin 4% tehtävään vastanneista sai vähemmän kuin 3 pistettä, kun taas tehtävän 9 vastaava luku on jopa melkein 50%. Muissa tehtävissä luvut vaihtelevat 10%-40% välillä. Keskimääräiset pistejakaumatulokset on esitelty alla olevassa kaaviossa 5.12.



Kaavio 5.12. Keskimääräiset pistejakaumatulokset vuosien 2015-2018 pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden pelkkää funktion derivointia koskevissa derivaattatehtävissä.

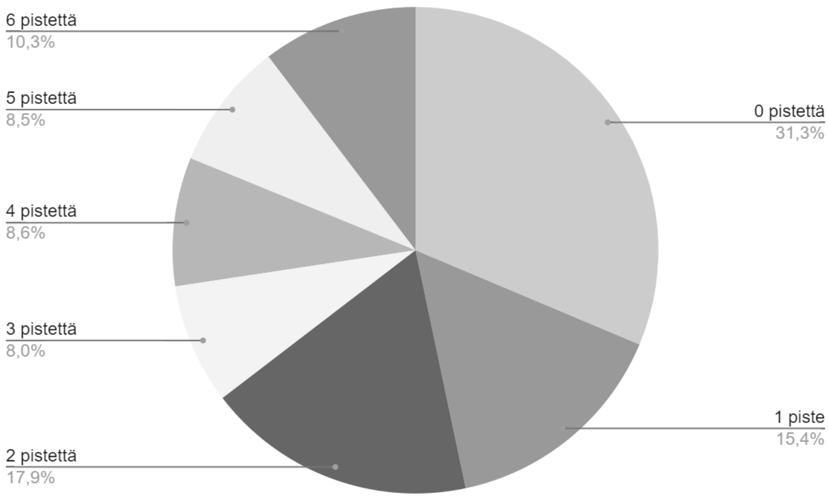
Saman tehtävätyypin tehtäviä vuosilta 2019-2020 oli kaksi kappaletta, joissa kummassakin eniten saavutettu pistemäärä oli 0. Kevään 2019 tehtävän 3 pistejakauma on huomattavasti hajanaisempi ja 6 pistettä tai enemmän sai noin 32% tehtävään vastanneista opiskelijoista. Kevään 2020 tehtävän 13 saadut pistemäärät painottuvat erittäin vahvasti pieniin pistemääriin, sillä 6 pistettä tai enemmän sai vain 10 opiskelijaa tehtävän tehneistä 5440 opiskelijasta.

Taulukon 5.4 kolmanteen sarakkeeseen valikoitui kolme tehtävää, joissa tuli tutkia funktion derivoituvuutta. Tehtävät olivat kaikki 6 pisteen tehtäviä. Kevään 2015 ja kevään 2018 tehtävissä 13 eniten saatu pistemäärä oli 0. Kevään 2016 tehtävässä 9.2 taas eniten saatiin täysiä pisteitä. Kevään 2018 tehtävä oli selkeästi haastava, sillä vain alle 4% tehtävään vastanneista opiskelijoista sai 3 pistettä tai enemmän. Kevään 2015 tehtävässä 13 noin puolet sai 3 pistettä tai enemmän ja kevään 2016 tehtävässä 9.2 vastaava luku oli yli 70%. Keskimääräiset pistejakaumatulokset on esitelty alla olevassa kaaviossa 5.13.



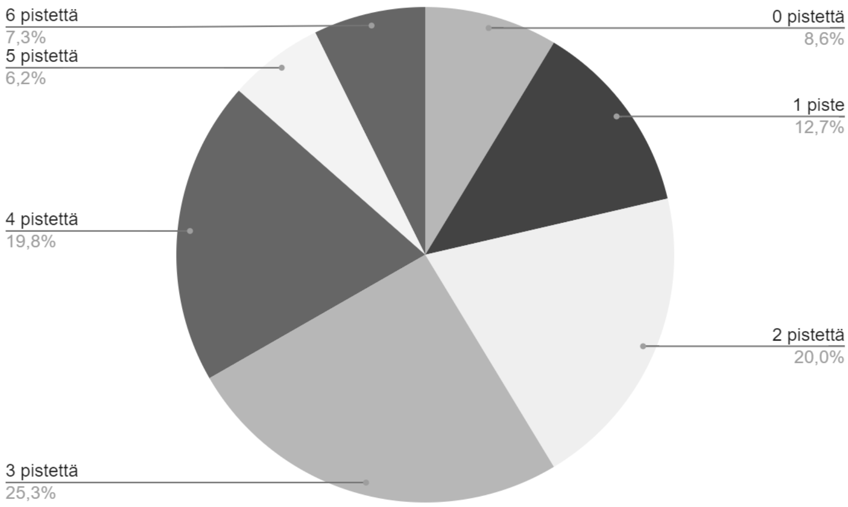
Kaavio 5.13. Keskimääräiset pistejakaumatulokset vuosien 2015-2020 pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden funktion derivoituvuutta koskevissa derivaattatehtävissä.

Otetaan seuraavaksi tarkasteluun taulukon 5.4 neljäs sarake, jonka tehtävissä tuli tutkia derivaattafunktion ominaisuuksia, kuten funktion kulkua tai ääriarvoja. Sarakkeeseen valikoitui myös sellaiset derivaattatehtävät, joissa piti käyttää apuna annettua tietoa tietystä määrästä nollakohtia. Analysoidaan pistejakaumia ensin niistä kuudesta tehtävästä, joiden maksimipistemäärä oli 6. Neljässä tehtävässä eniten saatu pistemäärä oli 0 ja kahdessa taas 1 ja 2. Vähiten saavutetut pistemäärät vaihtelivat tehtävien kesken siten, että kahdessa tehtävässä vähiten saatiin täysiä pisteitä, kahdessa 5 pistettä ja lopuissa vähiten saatiin pistemääriä 1 ja 2. Hajontaa tehtävien pistejakaumien kesken aiheuttaa kevään 2018 tehtävät 11 ja 12 sekä samaisen syksyn tehtävä 13, joissa 3 pistettä tai enemmän sai vain noin 9-15% opiskelijoista. Muiden kolmen tehtävän vastaavat luvut ylsivät kaikki yli 40%. Keskimääräiset pistejakaumatulokset on esitelty alla olevassa kaaviossa 5.14.



Kaavio 5.14. Keskimääräiset pistejakaumatulokset vuosien 2015-2020 pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattafunktion ominaisuuksia koskevissa derivaattatehtävissä.

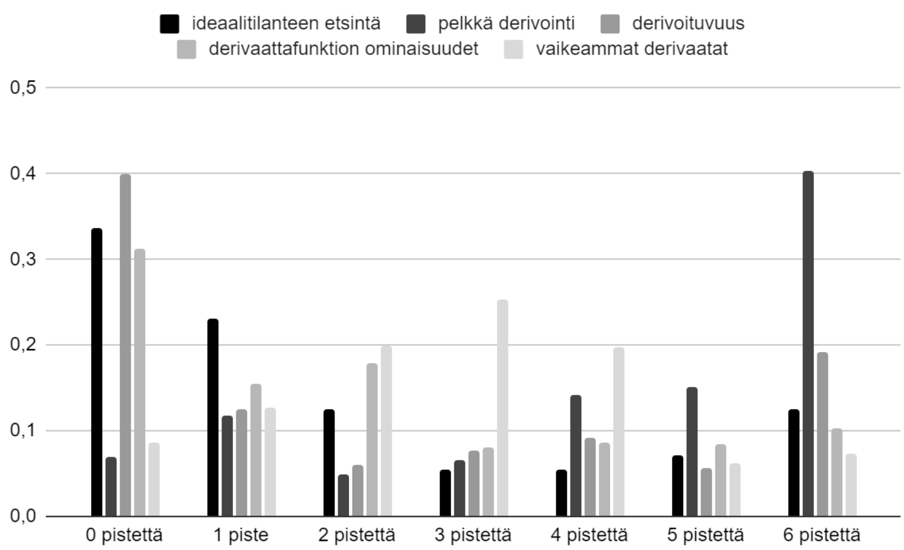
Taulukon 5.4 viimeisen sarakkeen tehtävät ovat edellisiä soveltavampia tai vaativat vaikeampien funktioiden derivaattaan liittyvää laskentaa. Tällaisia ovat esimerkiksi derivaattatehtävät, joissa pitää käyttää sisäfunktion derivaattaa tai derivoida käänteisfunktioita. Vuosien 2015-2018 ylioppilaskokeissa tällaisia tehtäviä oli kaksi, joissa kummassakin eniten saadut pistemäärät näyttäisivät pistejakaumien mukaan painottuvan pistemäärien 2 ja 3 kohdalle. Molemmissa tehtävissä 0, 5 ja 6 pistettä ovat olleet vähiten saavutetut pistemäärät. Suuria eroja pistejakaumissa ei juurikaan ollut. Keskimääräiset pistejakaumatulokset on esitelty alla olevassa kaaviossa 5.15.



Kaavio 5.15. Keskimääräiset pistejakaumatulokset vuosien 2015-2018 pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävissä, jotka painottuvat edeltäviä haastavampaan derivaatan laskentaan.

Vuosien 2018-2020 vastaavan tyypin tehtäviä oli myös kaksi kappaletta. Näistä kevään 2019 tehtävän 12 eniten saatu pistemäärä oli 0 ja kevään 2020 tehtävän 9 vastaava pistemäärä täysin päinvastainen 12. Tehtävässä 12 vain hieman yli 0,5% opiskelijoista oli saanut 6 pistettä tai enemmän. Tehtävä 9 oli ollut selkeästi helpompi, sillä yli puolet tehtävään vastanneista oli saanut 6 pistettä tai enemmän.

Edellä analysoitujen pistejakaumien keskiarvojen perusteella näyttäisi siltä, että pelkkää funktion derivointia vaativat tehtävät ovat olleet opiskelijoilla parhaiten hallussa. Huonoiten taas ovat sujuneet ne tehtävät, joissa tuli tutkia funktion derivoituvuutta. Keskimääräisiä pistejakaumatuloksia vuosien 2015-2018 derivaattatehtävistä vertaileva kaavio 5.16 esitelty alla.



Kaavio 5.16. Vuosien 2015-2018 pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien derivaattaosuustyyppien pistejakaumien vertailua prosenteittain.

5.2.3 Derivaattatehtävien pistejakaumat laatuluokittelun mukaan

Vuosina 2015-2020 pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa oli yhteensä 33 derivaattatehtäväksi luokiteltavaa tehtävää, joista yksi oli intuitiivisesti helpoiten ratkaistavissa jollain muulla tavalla kuin derivaattaa käyttämällä. Tarkastellaan siis yhteensä 32 derivaattatehtävää. Taulukon 4.4 mukaan tehtävät on jaettu kolmeen laatuluokkaan: perustehtävät, soveltavat tehtävät ja abstraktit tehtävät. Pitkän matematiikan derivaattatehtävien otoksessa perustehtäviä oli kolme ja abstrakteja tehtäviä ainoastaan yksi. Loput 28 tehtävää luokitellaan soveltaviksi tehtäviksi. Käytetään pistejakaumien tulkinnassa apuna alla esiteltyä taulukkoa 5.5, josta nähdään vuosien 2015-2020 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeisiin osallistuneiden opiskelijoiden määrä.

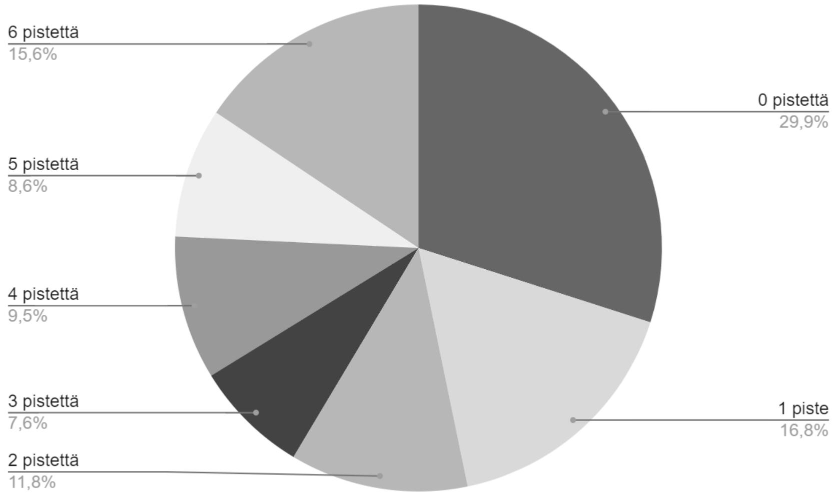
K15	S15	K16	S16	K17	S17	K18	S18	K19	S19	K20
10484	1138	10368	910	10554	900	11513	1641	11772	1396	13287

Taulukko 5.5. Pitkän matematiikan ylioppilaskokeisiin osallistuneiden opiskelijoiden määrä kokeittain.

Tarkastellaan ensin perustehtäväksi luokiteltuja tehtäviä, joita olivat syksyn 2017 ja kevään 2018 ensimmäiset tehtävät sekä syksyn 2019 tehtävä 2. Tehtävät olivat kaikki kokeen A-osassa ja siten pakollisia. Syksyn 2017 kokeeseen osallistui 900 opiskelijaa, joista jopa 899 vastasi tehtävään 1. Kevään 2018 ensimmäiseen tehtävään vastasivat kaikki 11513 opiskelijaa. Syksyllä 2019 tehtävään 2 vastanneita oli hieman vähemmän, sillä kokeeseen osallistuneista 1396 opiskelijasta vain 1389 vastasi kyseiseen perustehtävään. Jostain syystä 7 opiskelijaa jätti vastaamatta tähän pakolliseen tehtävään.

Kaikista kolmesta tehtävästä on saatu kaikkia mahdollisia pistemääriä, mutta selkeästi eniten on päästy maksimipisteisiin asti. Syksyn 2017 ensimmäisessä tehtävässä hieman yli kolmasosa sai 6 pistettä, mutta kuitenkin noin 93% opiskelijoista sai 3 pistettä tai enemmän. Kevään 2018 ensimmäisessä tehtävässä taas noin 64% pääsi kiinni 6 pisteeseen ja yli 96% saavutti 3 pistettä tai enemmän. Syksyn 2019 tehtävän maksimipistemäärä oli 12, minkä saavutti vain noin 30% tehtävään vastanneista. Kuitenkin yli 86% opiskelijoista sai tehtävästä 6 pistettä tai enemmän.

Soveltavia tehtäviä otokseen jää peräti 28 kappaletta. Tarkastellaan ensin 6 pisteen tehtäviä, joita on 18 kappaletta. Näistä 10 tehtävää olivat sellaisia, joista opiskelijat olivat saaneet eniten pistemäärää 0. Kolmessa tehtävässä oli päästy useimmiten täysiin pisteisiin ja loput eniten saavutetut pistemäärät vaihtelevat pistemäärien 1, 2 ja 3 välillä. Ainoastaan syksyn 2017 tehtävän 12 vähiten saatu pistemäärä oli 0 ja eniten saatu pistemäärä 3. Kevään 2018 tehtävän 13 vähiten saatu pistemäärä taas oli 6 ja eniten oli saatu pistemäärää 0. Vuosien 2015-2018 soveltavien derivaattatehtävien keskimääräiset pistejakaumat on esitelty kaaviossa 5.17.

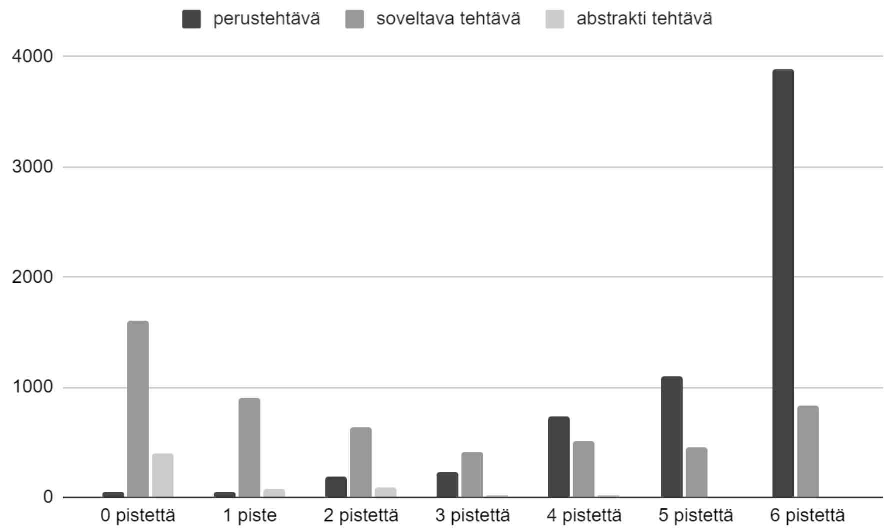


Kaavio 5.17. Vuosien 2015-2018 pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden soveltavien derivaattatehtävien keskimääräiset pistejakaumatulokset.

12 pisteen maksimipistemäärän soveltavia derivaattatehtäviä vuosina 2018-2020 oli yhteensä 10 kappaletta. Näistä tehtävistä seitsemässä eniten saatu pistemäärä oli 0. Ainoastaan kevään 2020 tehtävässä 9 opiskelijoiden eniten saavuttama pistemäärä oli täydet 12 pistettä. Jäljelle jäävissä kahdessa tehtävässä eniten oli saatu 1 ja 2 pistettä. Vähiten saavutetut pistemäärät löytyivät pisteskaalan loppupuolelta 9 ja 11 pisteen väliltä. Eniten hajontaa aiheuttavat kevään 2019 tehtävä 12 sekä kevään 2020 tehtävä 13, joiden pistejakaumat laskevat selkeästi tarkastellessa 6 pistettä tai enemmän.

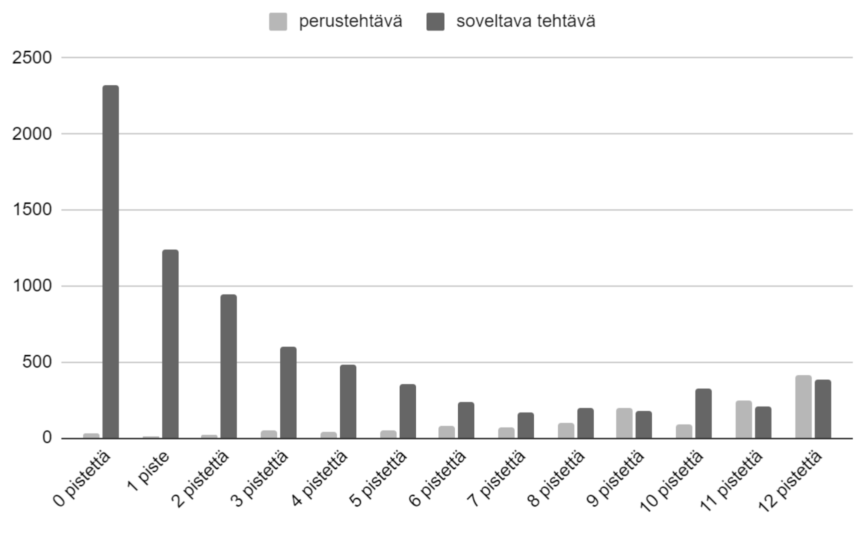
Abstrakteja tehtäviä 32 derivaattatehtävän otoksessa oli ainoastaan yksi, joka on syksyn 2018 tehtävä 13. Pistemäärään 0 jäi peräti 64% tehtävään vastanneista, kun taas 6 pistettä saavutti vain alle 1% opiskelijoista. Joko 3 pistettä tai enemmän sai vain noin 9% tehtävään vastanneista opiskelijoista. Tämä tarkoittaa sitä, että yli 90% on jäänyt alle kolmen pisteen. Tehtävä on siis syystäkin luokiteltu abstraktiksi ja täten vaikeustasoltaan melko haastavaksi.

Edellä analysoitujen vuosien 2015-2018 pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien pistejakaumien ja niiden keskiarvojen perusteella näyttäisi selkeästi siltä, että perustehtävät on hallittu opiskelijoiden keskuudessa parhaiten, sillä niistä on saatu parhaimpia pisteitä. Soveltavista tehtävistä saaduissa pistemäärissä on enemmän hajontaa. Otoksen abstraktiksi luokitellun tehtävän eniten saadut pistemäärät taas ovat pienimmästä päästä. Vuosien 2015-2018 tulokset on esitelty alla olevassa kaaviossa 5.18.



Kaavio 5.18. Vuosien 2015-2018 pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien perus-, ja soveltavien ja abstraktien tehtävien pistejakaumien vertailua prosenteittain.

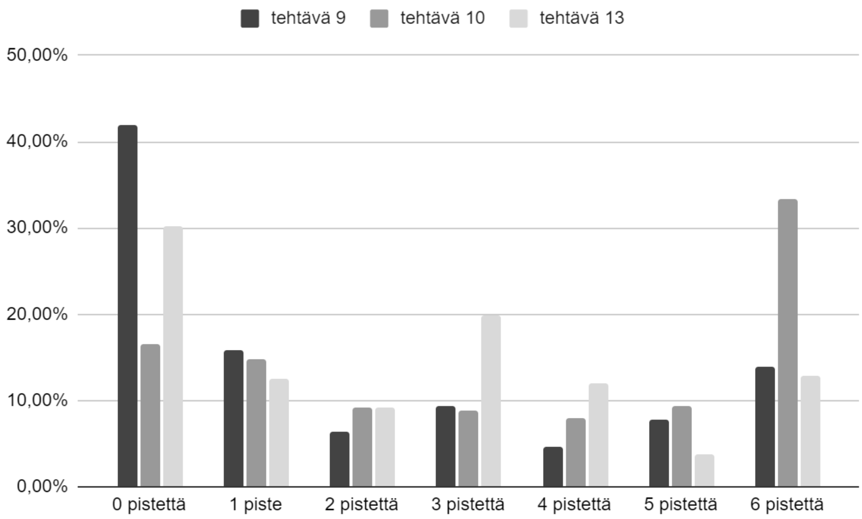
Vuosien 2019-2020 otokseen kuului sekä perus- että soveltavia tehtäviä. Näiden pistejakaumat näyttävät melko samanlaisilta kuin vuosina 2015-2018, sillä perustehtävistä on keskimäärin saatu selkeästi parempia pisteitä verrattaessa soveltavista tehtävistä saatuihin pisteisiin. Vuosien 2019-2020 tulokset on esitelty alla olevassa kaaviossa 5.19.



Kaavio 5.19. Vuosien 2018-2020 pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien perus- ja soveltavien tehtävien pistejakaumien vertailua prosenteittain.

5.2.4 Derivaattatehtävien pistejakaumat vaikeusasteluokittelun mukaan

Tarkastellaan seuraavaksi, miten tehtävien vaikeusasteet näkyvät pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien pistejakaumissa. Paneudutaan ensin vuoden 2015 kokeiden derivaattatehtäviin, jolloin koe oli yksiosainen ja tehtävät vaikeutuivat suurin piirtein lineaarisesti. Otoksessa on kolme tehtävää, jotka olivat kaikki kevään 2015 kokeessa. Tehtävät sijoittuivat tehtäväpaikoille 9, 10 ja 13. Alla olevaan kaavioon 5.20 on laskettu tehtävistä saatujen pistemäärien prosenttiosuudet suhteessa tehtävään vastanneiden opiskelijoiden määrään.

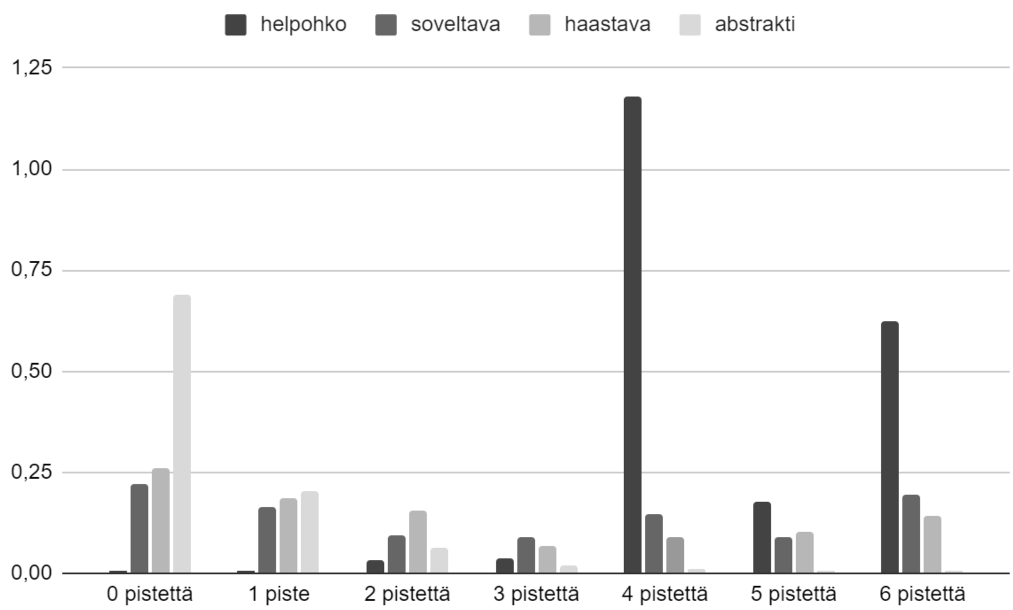


Kaavio 5.20. Vuoden 2015 pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien pistejakaumien vertailua prosenteittain.

Kaikki kevään 2015 tehtävät ovat olleet vaikeusasteeltaan melko haastavia, sillä ne on sijoitettu kokeen loppupäähän. Kuitenkin opiskelijoiden saamien pistemäärien perusteella näyttäisi siltä, että vaikeusasteluokittelu ei toteudu tämän kokeen derivaattatehtävissä. Tehtävästä 9 on saatu eniten pistemäärää 0, minkä perusteella se näyttäisi olevan otoksen vaikein tehtävä. Keskimmäinen tehtävä 10 taas on kerännyt vähiten 0 pistettä saaneita ja tehtävä 13 jotakin näiden väliltä. Kun tarkastellaan kaavion 5.20 pylväitä 6 pisteen osalta, on tehtävän 10 palkki korkeimpana ja tehtävän 13 alimpana. Tehtävästä 9 noin 35% tehtävään vastanneista on saanut 3 pistettä tai enemmän. Tehtävän 10 vastaava luku on jopa 60% ja tehtävän 13 miltei 50%. Edeltävien huomioiden myötä näyttäisi siltä, että otoksen ensimmäinen tehtävä tehtäväpaikalta 9 on ollut näistä kolmesta kaikkein vaikein ja sitä seuraava tehtävä 10 helpoin. Tehtäväpaikan 13 tehtävä on ollut vaikeusasteeltaan näiden kahden välissä.

Vuonna 2016 matematiikan ylioppilaskokeen rakenne muuttui kolmiportaiseksi. Tämä vaikeutti vaikeusasteluokittelua huomattavasti. Käytetään analyysissä apuna luvussa 5.1.1 rakennettua karkeasti arvioitua vaikeusasteluokittelua, joka on havainnollistettu taulukossa 5.1.

Pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden tehtävien maksimipistemäärä oli vielä vuoden 2018 loppuun asti 6 pistettä. Tarkastellaan siis vuosien 2016-2018 pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtäviä, joita oli yhteensä 18 kappaletta. Alla on esitelty kaavio 5.21, johon on sisällytetty derivaattatehtävien pistejakaumien keskiarvot vaikeusasteluokittelun mukaisesti neljään kategoriaan luokiteltuna: helpohko, soveltava, haastava ja abstrakti.



Kaavio 5.21. Vuosien 2016-2018 pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien keskimääräisten pistejakaumien vertailua vaikeusasteluokittelun mukaan prosenteittain.

Kaavion perusteella 0 pisteen ja 6 pisteen palkeissa vaikeusasteluokittelu näyttäisi toteutuvan odotetunlaisesti. Helpohkojen tehtävien osalta eniten opiskelijat ovat saaneet 6 pisteen sijaan 4 pistettä. Kuitenkin toisiksi eniten helpohkoista tehtävistä on saatu täysiä pisteitä. Haastavien ja abstraktien tehtävien osalta näyttäisi siltä, että pisteiden 0-4 kohdilla liikutaan lineaarisesti, mutta pisteiden 5 ja 6 kohdalla on lähdetty nousuun. Soveltavia tehtäviä tarkasteltaessa sama tapahtuu pistemäärän 5 kohdalla.

Vuonna 2019 matematiikan ylioppilaskokeet muuttuivat kokonaan sähköisiksi, minkä myötä myös tehtävien maksimipistemäärä nousi 12:een. Vuosina 2019-2020 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeissa oli yhteensä 11 derivaattatehtävää, joista edellä esitellyn neliportaisen luokittelun raameissa kaksi oli helpohkoja, kaksi soveltavia, yksi abstrakti ja loput kuusi haastavia tehtäviä. Helpohkoiksi luokitellut tehtävät eroavat pistejakaumiltaan jonkin verran. Pistemäärän 0 kohdalla pysytään kummankin tehtävän osalta pienissä lukemissa, mutta täysien pisteiden osalta eroja esiintyy, sillä syksyn 2019 tehtävässä 2 noin 30% opiskelijoista sai 12 pistettä, kun taas kevään 2020 tehtävässä 6 samaan pistemäärään pääsi ainoastaan 5%

tehtävään vastanneista. Sama hajontaero näkyy myös silloin, kun tutkitaan 6 pistettä tai enemmän saaneiden opiskelijoiden määriä: tehtävässä 2 kyseinen määrä oli miltei 89% ja tehtävässä 6 vain 24%. Vuoden 2020 kevään tehtävä 6 on siis ollut selkeästi haastavampi.

Keväiden 2019 ja 2020 kokeiden 3. tehtävät luokitellaan soveltaviksi tehtäviksi. Kyseisten tehtävien pistejakaumat noudattavat miltei samaa kaavaa. Kevään 2019 tehtävään vastanneista opiskelijoista noin 22% jäi kokonaan pisteittä, kevään 2020 samaisessa tehtävässä vastaava määrä oli 13%. Kuitenkin 2019 tehtävästä 8% tehtävään vastanneista pääsi täysiin pisteisiin, kun keväällä 2020 pistemäärän 12 saavutti noin 5% opiskelijoista. Tarkasteltaessa 6 pistettä tai enemmän saaneita opiskelijoita, kevään 2019 tehtävä 3 keräsi noin 32% opiskelijoista ja kevään 2020 vastaava tehtävä noin 29%.

Haastavaksi luokiteltuja tehtäviä oli yhteensä 6 kappaletta. Tehtävien keskimääräisten pistejakaumatulosten mukaan noin 45% tehtävään vastanneista opiskelijoista oli saanut 0 pistettä ja täysiin pisteisiin oli yltänyt vain noin 4%. Joko 6 pistettä tai enemmän sai noin 16% opiskelijoista.

Abstrakteja tehtäviä otoksessa oli ainoastaan yksi. Tehtävään vastanneista noin 37% oli saanut 0 pistettä ja kaikista 5440 opiskelijasta ainoastaan yksi oli saanut täydet 12 pistettä. 6 pistettä tai enemmän oli saavuttanut vain 10 opiskelijaa eli alle 0,2%. Tehtävä on siis ollut selkeästi erittäin haastava.

Kaiken kaikkiaan näyttäisi siltä, että luvussa 5.1 laadittu vaikeusasteluokittelu toteutuu myös vuosina 2019-2020 lukuunottamatta poikkeuksellisen haastavaa helpohkoksi luokiteltua kevään 2020 tehtävää 6, mikä pistejakaumien perusteella voitaisiin luokitella soveltavaksi tehtäväksi.

5.2.5 Opiskelijoiden valitsemat derivaattatehtävät

Tarkastellaan seuraavaksi tehtävävalintoja vuosien 2015-2020 pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtäviä koskien. Paneudutaan muun muassa siihen, kuinka paljon derivaattatehtäviä on valittu, millaisia tehtäviä on valittu eniten ja millaisia vähiten sekä sovelletaan näitä tietoja laatuluokitteluun ja tehtävien vaikeusasteisiin. Tulkinnassa on käytetty apuna taulukon 5.5 tietoja pitkän matematiikan ylioppilaskokeisiin osallistuneiden opiskelijoiden kokonaislukumääristä.

Selkeästi suosituimmat tehtävät opiskelijoiden keskuudessa tehtävävastauksien mukaan olivat oletuksen mukaisesti pakolliset tehtävät, joita vuosien 2015-2020 pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa oli yhteensä 12 kappaletta. Näistä jopa kymmenen tehtävän vastausprosentti oli yli 95% ja kahden tehtävän vastaavat prosentit 86% luokkaa. Pakollisten tehtävien keskimääräinen valintaprosentti on noin 96%. Koska tehtävät eivät ole valinnaisia, ei tutkita niitä tämän enempää. Pienimmän valintamäärän sai kevään 2015 tehtävä 13, johon vastasi vain 34% kokeeseen osallistuneista opiskelijoista. Alle 40% jäivät myös kevään 2018 tehtävä 12, syksyn 2018 tehtävä 13 sekä kevään 2020 tehtävä 6. Valinnaisten tehtävien keskimääräinen valintaprosentti oli noin 57%.

Taulukossa 5.4 on luokiteltu vuosien 2015-2020 pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävät tehtävätyypeittäin tehtäviin, joiden derivaattaosuus painottuu:

1) ideaalitilanteen etsimiseen funktion derivaatan sekä sen nollakohtien ja ääriarvojen avulla,
2) yksittäisen funktion derivointiin,
3) derivoituvuuden tutkimiseen,
4) derivaatta funktion ominaisuuksien tutkimiseen, tai
5) edeltäviä soveltavampaan tai vaikeampien funktioiden derivaattaan liittyvään laskentaan.

Luvun 5.2.2 tuloksien ja analyysien perusteella tehtävät, joissa vaadittiin pelkkää yksittäisen funktion derivointia, olivat tuottaneet opiskelijoille parhaimmat pisteet. Huonoiten taas oli hallittu ne tehtävät, joissa tuli tutkia funktion derivoituvuutta.

Ideaalitilanteen etsimiseen perustuvia derivaattatehtäviä oli vuosien 2015-2020 pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa yhteensä kahdeksan kappaletta, joista viisi olivat valinnaisia. Vähiten vastattiin syksyn 2018 tehtävään 7, johon oli vastannut 52% kokeeseen osallistuneista opiskelijoista. Eniten vastauksia keräsi kevään 2020 tehtävä 6, johon vastasi peräti 83% opiskelijoista. Keskimäärin tämän tyypin tehtäviin vastasi noin 66% kokeisiin osallistuneista.

Tehtävät, joissa vaadittiin derivaattaosuuden myötä ainoastaan yksittäisen funktion derivointia, olivat suosittuja pakollisia tehtäviä. Tämän tyypin tehtäviä oli otoksen kokeissa yhteensä seitsemän kappaletta, joista neljä olivat valinnaisia. Suurimman vastausprosentin saavutti kevään 2017 tehtävä 10, mihin vastasi noin 90% opiskelijoista. Vähiten vastauksia taas keräsi kevään 2020 tehtävä 13, mihin vastasi vain noin 41% kaikista kokeeseen osallistuneista. Keskimäärin tämän tyypin tehtäviin vastasi kuitenkin vain noin 60% opiskelijoista.

Derivoituvuuden tutkimiseen painottuvat derivaattatehtävät koettiin melko vaikeiksi, mikä näkyy myös vastausprosenteissa. Tyypin tehtäviä oli yhteensä kolme ja prosenttimäärät vaihtelivat välillä 34-53%. Keskimäärin tyypin tehtäviin vastasi vain noin 42% opiskelijoista.

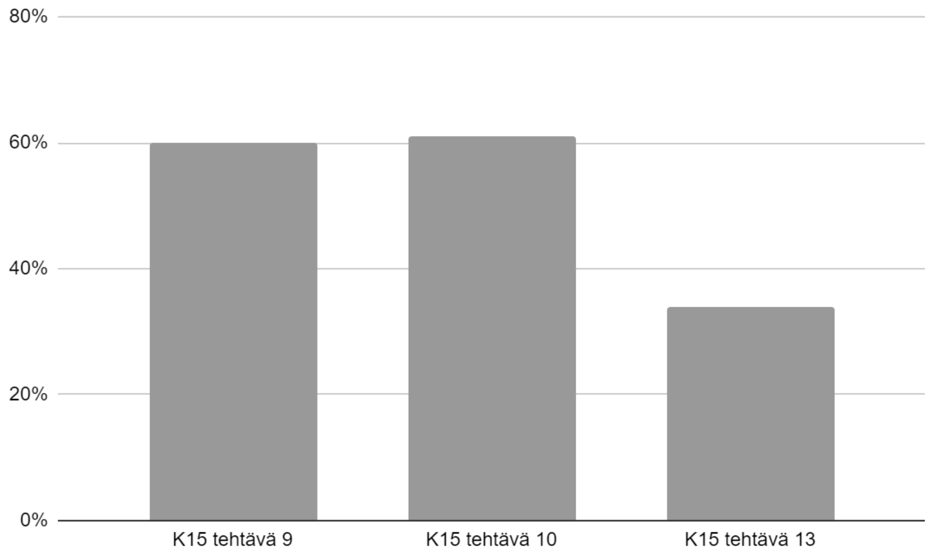
Derivaattafunktion ominaisuuksien tutkimiseen perustuvia tehtäviä oli yhteensä 10 kappaletta, joista vain viisi oli valinnaisia tehtäviä. Noin 78% opiskelijoista oli valinnut kevään 2019 tehtävän 11 ja vain noin 38% kevään 2018 tehtävän 12. Keskimäärin derivaattafunktion ominaisuuksia päätti lähteä tutkimaan noin 55% kokeisiin osallistuneista.

Edeltäviä soveltavampien tai vaikeampien funktioiden derivointiin liittyvien tehtävien kategoriaan sisältyy neljä tehtävää, joista kolme olivat valinnaisia. Vähiten oli valittu kevään 2020 tehtävää 9, johon vastasi vain noin 39% opiskelijoista. Syksyn 2017 tehtävä 12 taas keräsi jopa 86% kokeeseen vastanneista opiskelijoista. Näin ollen keskimääräinen vastausprosentti on noin 63%.

Näyttäisi siltä, että eniten opiskelijoita houkutti vastata tehtäviin, joiden derivaattaosuudet painottuivat ideaalitilanteen etsimiseen derivaattafunktion nollakohtien ja ääriarvojen avulla. Vähiten vastauksia keräsivät tehtävät, joissa pyydettiin tutkimaan funktion derivoituvuutta. Tehtävätyyppien väliset erot vastausprosenteissa eivät kuitenkaan ole kovin suuria.

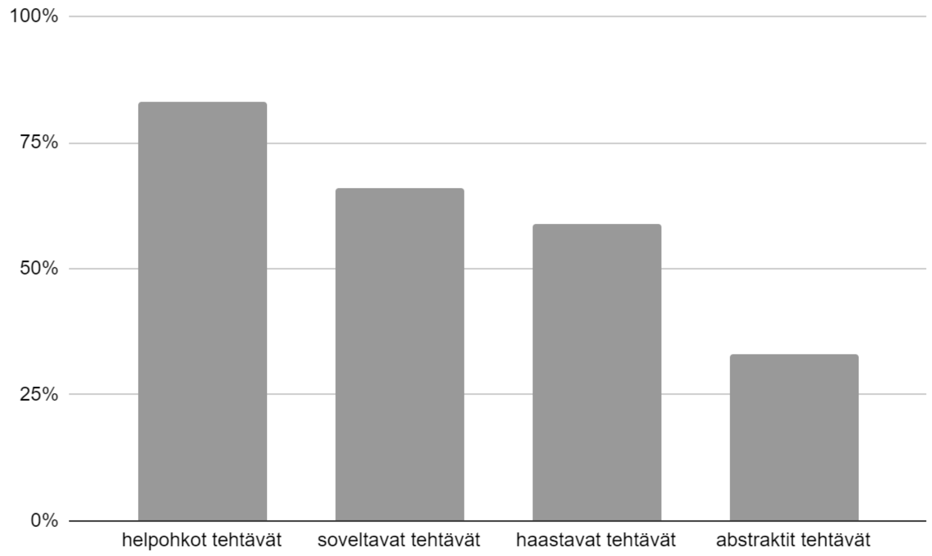
Luvussa 4.3.2 tehdyn laatuluokittelun perusteella tehtävät jaettiin perustehtäviin, soveltaviin tehtäviin ja abstrakteihin tehtäviin. Vuosien 2015-2020 pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa oli yhteensä 32 derivaattatehtävää, joista kolme olivat perustehtäviä, 28 soveltavia tehtäviä ja yksi abstrakti tehtävä. Perustehtäviksi luokitellut tehtävät olivat kaikki pakollisia tehtäviä, joten niiden valintaprosenttien tutkiminen ei ole kiinnostavaa. Soveltavista tehtävistä 20 oli valinnaisia tehtäviä. Tehtävien keskimääräinen valintaprosentti oli noin 57%. Ainoan abstraktin tehtävän vastausprosentti oli 38%.

Jaetaan vaikeusasteluokittelun tutkiminen kahteen osaan; kokeet ennen vuotta 2016 ja kokeet sen jälkeen. Tämä on mielekästä, koska vuonna 2016 otettiin käyttöön kolmiosainen matematiikan ylioppilaskoerakenne, jonka vaikeusaste ei vaihtele lineaarisesti. Vuoden 2015 kokeissa oli yhteensä 3 derivaattatehtävää, joiden tehtäväpaikat näyttäisivät vaikuttavan vastausprosentteihin. Tehtävien keskimääräiset valintaprosentit on esitelty alla olevassa kaaviossa 5.22.



Kaavio 5.22. Vuoden 2015 ylioppilaskokeiden pitkän matematiikan derivaattatehtävien keskimääräiset valintaprosentit.

Käytetään vuosien 2016-2020 derivaattatehtävien jakaumia tutkiessa apuna kaaviota 5.1, jossa on arvioitu kokeiden tehtäväpaikkojen vaikeusasteet. Tutkitaan tehtävien vaikeusastetta luvun 5.2.4 tapaan siten, että jaetaan vaikeusasteet edelleen neliportaisesti luokkiin helpohko, soveltava, haastava ja abstrakti. Luokkien keskimääräiset valintaprosentit on esitelty alla olevassa kaaviossa 5.23



.

Kaavio 5.23. Vuosien 2016-2020 ylioppilaskokeiden pitkän matematiikan derivaattatehtävien keskimääräiset valintaprosentit.

Kaavion mukaan helpohkot tehtävät ovat houkuttaneet eniten vastaajia ja taas abstraktit tehtävät vähiten. Soveltavien ja haastavien tehtävien valintaprosentit sijoittuvat odotetusti näiden välille.

6 Tulokset ja muut tutkimukset

Edellä tarkasteltiin funktion derivaatan tarkkaa määritelmää ja derivaattaa vuosien 2015 ja 2019 lukion opetussuunnitelmissa sekä oppikirjoissa. Suurin pääpaino oli kuitenkin lyhyen ja pitkän matematiikan ylioppilaskoetehtävien derivaattapainotuksissa sekä pisteytyksissä.

Tarkastellaan seuraavaksi esiteltyjä tuloksia sekä niistä muodostettavia johtopäätöksiä. Pohditaan myös tulosten luotettavuutta ja käydään lyhyesti läpi aiempia tutkimuksia sekä ideoita mahdollisille jatkotutkimuksille.

6.1 Johtopäätökset ja pohdintaa

Käydään seuraavaksi läpi luvuissa 2-5 esiteltyjä tuloksia ensin lyhyen matematiikan ja sen jälkeen pitkän matematiikan osalta. Tarkastellaan, miten edellä esitellyt opetussuunnitelmat ja oppikirjatarkastelut käyvät yksiin sekä millaisia johtopäätöksiä voidaan tehdä derivaattaan painottuvista ylioppilaskoetehtävistä ja niiden pisteytyksistä vuosina 2015-2020.

6.1.1 Derivaatta lyhyessä matematiikassa

Luvussa 2 määriteltiin perusteellisesti funktion derivaatta sekä siihen liittyviä käsitteitä, kuten funktion raja-arvo ja jatkuvuus. Luvun 3.1.1 opetussuunnitelmatarkastelun myötä tultiin siihen tulokseen, että lyhyen matematiikan derivaattakurssilla määritelty derivaatta ja sen käsittely jäävät melko kauas derivaatan tarkasta määritelmästä. Kyseiset LOPSit jättävät derivaatan lyhyessä matematiikassa muutosnopeuden tarkastelun tasolle, mikä on toki yksi näkökulma ja osa totuutta. Kuitenkin opetussuunnitelmista voidaan nähdä, että lyhyessä matematiikassa derivaatan käsittely jää pitkälti graafisin ja numeerisin menetelmin laskennalliselle tasolle. Tämä voidaan huomata myös luvun 3.2 oppikirjatarkastelusta.

Vuosien 2015-2020 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeissa on ollut kahta koetta lukuunottamatta 1-2 derivaattatehtävää. Luvussa 4.2.2 muodostettiin kolmiosainen laatuluokittelu, joka jakoi derivaattatehtävät perus-, soveltaviin ja abstrakteihin tehtäviin. Otoksen 17 derivaattatehtävästä peräti 16 luokiteltiin soveltavaksi tehtäväksi, mikä osoittaa, että derivaatan hallinta on lyhyessä matematiikassa soveltavaa osaamista. Tämä onkin ymmärrettävää, koska lyhyen matematiikan derivaattakurssi ei ole opiskelijoille pakollinen. Luvussa 5.1.1 huomattiin, että derivaattatehtävien derivaattaosuuksista on ollut jaossa noin 63-69% tehtävien kokonaispistemääristä. Lyhyessä matematiikassa derivaattatehtävissä vaadittiin useimmiten yksinkertaista derivaatan hallintaa, kuten funktion derivointia, sen nollakohtien ratkaisemista tai funktion kulun tutkimista.

Lyhyen matematiikan derivaattatehtävien pistejakaumia tarkasteltiin luvuissa 5.1.2-5.1.4. Tehtävätyyppejä tarkasteltaessa huomattiin, että funktion derivointi ja sen arvon laskeminen jossakin pisteessä osattiin sekä parhaiten että huonoiten (kaavio 5.4). Luvussa 4.2.2 tehdyn laatuluokittelun mukaan tarkasteltuna otoksen yksi ainut perustehtävä oli osattu selkeästi paremmin, kuin loput 16 soveltavaa tehtävää (kaavio 5.6). Vuoden 2015 kokeissa tehtävien vaikeusaste oletettiin kasvavan lineaarisesti. Tehdyn tarkastelun mukaan oletus pätee suurimmilta osin (kaavio 5.7). Taulukossa 5.1 määritelty vaikeusasteluokittelu jakoi tehtävät neljään eri luokkaan, joista vuosina 2016-2018 toteutui kolme. Huomattiin, että tällöin (kaavio 5.8) sekä vuosina 2019-2020 vaikeusasteluokittelu näyttäisi toteutuvan odotetunlaisesti.

Luvussa 5.1.5 ryhdyttiin tarkastelemaan opiskelijoiden tehtävävalintoja. Erityisen kiinnostavaa tutkielman kannalta oli tutkia, kuinka paljon juuri derivaattatehtäviä oli valittu, millaisia tehtäviä oli valittu eniten ja/tai vähiten, sekä miten edellä mainitut soveltuvat laatuluokitteluun ja tehtävien vaikeusasteisiin. Otoksen pakollisten tehtävien valintaprosentti oli noin 98% ja valinnaisten keskimäärin noin 47%. Taulukon 5.2 tehtävätyyppiluokitteluun nojaten ensimmäisen sarakkeen tehtäviä valitsi keskimäärin noin 41%, toisen sarakkeen noin 52% ja viimeisen noin 56%. Näyttäisi siis siltä, että lyhyen matematiikan opiskelijoita kiinnostaa eniten soveltavat tehtävät. Huomattiin myös, että vuoden 2015 kokeiden tehtävien vaikeusasteet näyttäisivät vaikuttavan tehtävävalintoihin siten, että helpompia derivaattatehtäviä valitaan useimmin (kaavio 5.9). Vuosien 2016-2020 kokeiden tarkastelussa törmättiin yllättävään tulokseen, jossa vaikeusasteeltaan abstrakteja tehtäviä oli valittu eniten (kaavio 5.10). Edellisessä luvussa kuitenkin huomattiin, että pisteitä abstrakteista tehtävistä on silti saatu valitettavasti vähiten. Muutoin tehtäviä valittiin odotetusti siten, että helpohkot olivat suurimmassa suosiossa.

6.1.2 Derivaatta pitkässä matematiikassa

Vuosien 2015 ja 2019 opetussuunnitelmia tarkasteltiin pitkän matematiikan osalta luvussa 3.1.2. Kyseisten opetussuunnitelmien väliltä löydettiin eroavaisuuksia tavoitteiden osalta: vuoden 2019 LOPSin derivaattakurssin tavoiteosiosta on jätetty kokonaan pois rationaalifunktion suurimman ja pienimmän arvon määrittäminen sekä rationaalifunktion nollakohtien määrittäminen ja rationaaliepäyhtälöiden käsittely. Nämä kuitenkin löytyvät edelleen kurssin keskeisistä sisällöistä. Uusina tavoitteina vuoden 2019 LOPSiin on tuotu yhdistetyn funktion derivaatta sekä derivaatan tulkinnan ymmärtäminen funktion muutosnopeutena. Opetussuunnitelmien mukaan pitkässä matematiikassa päästään melko pitkälti kiinni funktion derivaatan tarkkaan määritelmään. Tämä voidaan nähdä myös luvun 3.2.2 oppikirjatarkastelussa, missä huomattiin lukion pitkässä matematiikassa määriteltyjen funktion raja-arvon sekä derivaatan taustalla olevien ideoiden olevan yhtenevät tarkkoihin määritelmiin.

Määritelmiä on pelkistetty ja muutettu helpommin ymmärrettävään muotoon, mutta ne ovat kuitenkin pitkälti määritelmän mukaisia.

Derivaattatehtäviä on ollut pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa viime vuosina keskimääräisesti noin kolme kappaletta ylioppilaskoetta kohden. Pakollisia derivaattatehtäviä 11 kokeen otoksessa on ollut yhteensä seitsemässä kokeessa. Tämä tarkoittaa sitä, että jopa neljässä kokeessa on voinut saavuttaa täydet pisteet ilman minkäänlaista derivaatan hallintaa. Luvussa 4.3.2 muodostettiin laatuluokittelu derivaattatehtäville. Laatuluokittelun mukaan otoksen 33 derivaattatehtävästä peräti 28 oli luokiteltavissa soveltaviksi tehtäviksi. Näin ollen perustehtäviksi luokiteltiin kolme ja abstrakteiksi tehtäviksi kaksi derivaattatehtävää. Abstrakteista tehtävistä yksi jätettiin luvun 5.1.1 tarkastelussa kokonaan pois, koska tehtävänanto ei intuitiivisesti ohjaa käyttämään ratkaisussa derivaattaa. Siis otos kutistui 32 derivaattatehtävään. Vuosien 2015-2018 pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa derivaattatehtävien derivaattaosuuksista on ollut jaossa keskimäärin 63% yksittäisen derivaattatehtävän kokonaispistemäärästä. Vuosien 2019-2020 kokeissa vastaava määrä laski 46%:een oletettavasti siksi, että tehtävien kokonaispistemäärän kasvaessa tehtäviin on mielekkäämpää sisällyttää enemmän eri matematiikan osa-alueiden sovelluksia. Tehtävätyyppiluokittelun mukaan derivaattatehtävissä vaadittiin osaamista laajasti eri derivaatan hallinnan osa-alueista (taulukko 5.4).

Luvuissa 5.2.2-5.2.4 tutkittiin pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien pistejakaumia. Huomattiin, että pelkkää funktion derivointia edellyttäneet tehtävät olivat sujuneet opiskelijoilta parhaiten. Huonoiten taas oli pärjätty niissä tehtävissä, joissa vaadittiin funktion derivoituvuuden tarkastelua (kaavio 5.16). Luvussa 4.3.2 rakennetun laatuluokittelun mukaan tarkasteltuna vuosina 2015-2018 perustehtävät ovat olleet parhaiten opiskelijoiden hallinnassa, sillä niistä on saatu eniten pisteitä. Soveltavien tehtävien pistejakaumissa on jonkin verran hajontaa ja abstraktien tehtävien pistemäärät liikkuvat pitkälti 0 ja 1 pisteen kohdalla (kaavio 5.18). Vuosina 2019-2020 pistejakaumat mukailevat aiempien vuosien jakaumia (kaavio 5.19). Kevään 2015 kokeen vaikeusastetta tarkasteltaessa huomattiin, että pistejakaumat eivät noudata oletettua lineaarista kaavaa (kaavio 5.20). Luvussa 5.2.4 rakennettu vaikeusasteluokittelu taas näyttäisi toteutuvan pistejakaumia tarkasteltaessa sekä vuosina 2016-2018 (kaavio 5.21) että edelleen vuosina 2019-2020. Jälkimmäiseen ajanjaksoon tosin oli sisällytetty poikkeuksellisen haastava helpohkoksi luokiteltava tehtävä, joka rikkoo pistejakaumaa hieman.

Pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattatehtävien tehtävävalintoja tarkasteltiin luvussa 5.2.5. Erityisen kiinnostavaa tutkielman kannalta oli tutkia, kuinka paljon juuri derivaattatehtäviä oli valittu, millaisia tehtäviä oli valittu eniten ja/tai vähiten, sekä miten edellä mainitut soveltuvat laatuluokitteluun ja tehtävien vaikeusasteisiin. Otoksen pakollisia tehtäviä oli valinnut noin 96% kokeisiin osallistuneista opiskelijoista ja valinnaisia tehtäviä noin 57%. Taulukon 5.4 tehtävätyyppiluokitteluun nojaten näyttäisi siltä, että opiskelijat valitsivat eniten sellaisia derivaattatehtäviä, joissa pyrittiin derivaatan avulla etsimään tietty tehtävänannon määräämä ideaalitilanne. Vähiten valittiin tehtäviä, joissa pyydettiin tutkimaan funktion derivoituvuutta. Tämäntyyppisistä tehtävistä myös aiemmin todettiin opiskelijoiden saaneen vähiten pisteitä. Luvussa 5.2.4 laaditun vaikeusasteluokittelun mukaisesti tarkasteltuna opiskelijat valitsivat eniten helpohkoiksi luokiteltuja tehtäviä ja vähiten abstrakteiksi luokiteltuja tehtäviä (kaaviot 5.22 ja 5.23). Soveltavien ja haastavien tehtävien valintaprosentit sijoittuvat näiden välille odotetusti.

6.2 Luotettavuustarkastelu

Tutkimuksen teoriaosuus pohjautuu puhtaasti analyysitason matematiikkaan sekä valtakunnallisiin lukion opetussuunnitelmiin, joten näiden luotettavuutta ei ole tarpeen tarkastella. Luvun 3 oppikirjatarkastelu on jätetty tarkoituksella suppeaksi, koska työn pääpaino ei keskity siihen. Oppikirjoja on tarkasteltu täysin objektiivisesti.

Tutkimuksen aineistona on käytetty vuosien 2015-2020 lyhyen ja pitkän matematiikan ylioppilaskokeita, jotka ovat kaiken kansan saatavilla. Otos on melko suuri, koska kokeita ja siten derivaattatehtäviäkin on paljon. Saatu data on tämän vuoksi suhteellisen luotettavaa. Aineistona on käytetty myös Ylioppilastutkintolautakunnalta saatuja ylioppilaskokeiden pistejakaumia sekä kokeisiin osallistuneiden opiskelijoiden määriä. Kyseinen aineisto on objektiivista, numeerista dataa. Tutkimuksessa tutkitaan puhtaasti opetuksesta irrallista opiskelijoiden osaamista. Numeerista dataa on analysoitu muun muassa keskiarvoja tutkimalla. Mahdollista merkittävää hajontaa on käsitelty ja se on otettu huomioon. Analyysissä apuna on ollut myös YTL:n rakentamat pisteytysohjeet, jotka ovat yleisesti luettavissa.

Rakennetut laatuluokittelut (taulukot 4.2 sekä 4.4) ovat kirjoittajan subjektiivinen näkemys aineiston luokittelun ja tulosten jäsentelyn helpottamiseksi. Laatuluokittelut on perusteltu muutamien derivaattatehtävien esiteltyjen tehtävänantojen ja malliratkaisujen perusteella. Muodostettu vaikeusasteluokittelu (taulukko 5.1) on suuntaa-antava kirjoittajan subjektiivinen näkemys vaikeusasterakenteesta. Luokittelun tarkoitus on helpottaa pistejakaumien tulkintaa sekä antaa tuloksille lisäulottuvuuksia ja sen toteutumista on pohdittu luvussa 5.1.4. Saatujen tulosten mukaan rakennettu vaikeusasteluokittelu näyttäisi toteutuvan. Kirjoittajan kehittämät tehtävätyyppiluokittelut (taulukot 5.2 ja 5.4) ovat yksi ehdotus mahdollisesta tehtävien derivaattaosuuksien mukaisesta luokittelusta. Jaottelu on tarkoituksella suuripiirteinen ja karkea, sillä derivaattatehtävissä ilmaantui jonkin verran luokittelujen mukaisten tehtävätyyppien päällekkäisyyksiä. Näissä tapauksissa tehtävät luokiteltiin siihen luokkaan, jonka derivaattaosuudesta oli jaossa eniten pisteitä. Edellä mainitut luokittelut ovat kirjoittajan itse asettamia eikä niitä ole tämän työn ulkopuolella käytetty tai tutkittu.

Tutkittaessa opiskelijoiden valitsemia tehtäviä on käytetty YTL:n välittämiä tilastoja kokeisiin osallistuneiden opiskelijoiden sekä tehtäviin vastanneiden opiskelijoiden määristä. Numeerista dataa on analysoitu muun muassa keskiarvoja tutkimalla. Mahdollista merkittävää hajontaa on käsitelty ja se on otettu huomioon.

6.3 Aiemmat tutkimukset ja jatkotutkimusehdotuksia

Derivaatan opetusta ja oppimista on tutkittu jonkin verran. Pääpaino tehdyissä tutkimuksissa on oppikirja- ja -materiaalitarkasteluissa sekä derivaattaan liittyvissä oppimisvaikeuksissa. Ylioppilaskokeisiin painottuva tutkimus on jäänyt vähemmälle.

Eräs aihetta sivunnut tutkimus on Tiia Tallilan pro gradu -tutkielma aiheesta “Hallitseeko ylioppilaskokelas pitkän matematiikan?”. Tutkielmassa viitataan derivaatan osaamiseen ääriarvotehtävien myötä ja niiden osaamista analysoidaan Tallilan työn luvussa 5.1.5. Tutkielma on kuitenkin vuodelta 2013, joten tutkimuksen otos on vanhempi kuin tässä työssä.

Tämän tutkielman ulkopuolelle jää monia kiinnostavia tutkimuskohteita. Mielenkiintoista olisi esimerkiksi tutkia, miten derivaattatehtäviä osataan suhteessa muihin ylioppilaskokeiden tehtäviin. Myös vuosien 2016 ja 2019 ylioppilaskoeuudistukset ovat saattaneet vaikuttaa opiskelijoiden oppimiseen ja sen myötä derivaattatehtävistä saatuihin pisteisiin, mitä voisi olla kiinnostavaa tutkia. Tallilan tutkimuksessa analysoitiin ylioppilaskokelaiden aihenhallintaa matematiikan ylioppilaskokeissa ja yksi tutkittu osa-alue sivusi derivaatan osaamista. Tämän tutkielman tuloksia voisi olla mielenkiintoista vertailla tässä tutkimuksessa saatuihin tuloksiin.

7 Lähteet

Harjulehto, P., Klén, R. & Koskenoja, M. (2016). *Analyysiä reaaliluvuilla*. Helsinki: Unigrafia Oy

Föreläsningsanteckningar i analys I januari 2009. http://users.abo.fi/aernvall/analys2019/analys_januari_2009.pdf. Luettu 5.3.2021.

Opetushallitus 2015. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015*. Helsinki. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf. Luettu 14.10.2020.

Opetushallitus 2019. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*. Helsinki. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf. Luettu 14.10.2020.

Kurvinen, S., Ottelin, J., Santavuori, T., Tauriainen, T. & Vallineva, S. (2017). *Huippu 7.* Helsinki: Kustannusyhtiö Otava

Hähkiöniemi, M., Juhala, S., Juutinen, P., Louhikallio-Fomin, S., Luoma-aho, E., Raittila, T. & Tikka, T. (2015). *Juuri 6*. Helsinki: Kustannusyhtiö Otava

Ylioppilastutkintolautakunta. *Vuosien 2015-2020 matematiikan ylioppilaskokeiden tehtävät.* https://yle.fi/aihe/artikkeli/2015/12/15/yo-kokeet-matematiikka. Luettu 4.11.2020

Ylioppilastutkintolautakunta. *Vuosien 2015-2020 matematiikan ylioppilaskokeiden tehtävien hyvän vastauksen piirteet.* https://www.ylioppilastutkinto.fi/ylioppilastutkinto/hyvan-vastauksen-piirteet. Luettu 4.11.2020

Ylioppilastutkintolautakunta. *Vuosien 2015-2020 matematiikan ylioppilaskokeiden tehtäväkohtaiset pistejakaumat.* Saatu 17.11.2020

Tallila, T. *Pro gradu -tutkielma: Hallitseeko ylioppilaskokelas pitkän matematiikan?* https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/41885/1/URN%3ANBN%3Afi%3Ajyu-201307102081.pdf. Luettu 11.3.2021

8 Liitteet

Liite 1: Ylioppilastutkintolautakunnan myöntämä tutkimuslupa

Päätös
3.11.2020
OPH-4265-2020

fil. yo Viivi Tiihonen
Helsingin yiopisto
viivi.tiihonen@helsinki.fi

Viite: hakemuksenne 12.10.2020

Asia: Tutkimuslupa, derivaattatehtävät matematiikan ylioppilaskokeissa

Ylioppilastutkintolautakunta myöntää fil.yo Viivi Tiihoselle luvan käyttää tutkimusaineistona ylioppilastutkinnon matematiikan kokeiden koetehtäviä ja koesuorituksia koskevia jälkitutkimusaineistoja (tehtäväkohtaiset pistejakaumat) vuosilta 2015-2020. Lupa myönnetään lautakunnan arkistossa saatavilla olevan aineiston mukaisesti. Syksyn 2020 tutkinnon aineisto voidaan luovuttaa vasta kun arvostelutyö on saatu valmiiksi.

Aineisto luovutetaan Tiihosen pro gradu -tutkielmaa varten. Työssään Tiihonen tutkii derivaatan opetusta lukiossa mm. OPS- ja oppikirjatarkastelujen avulla. Tiihosen tavoitteena on sisällyttää opinnäytetyöhönsä analyysi matematiikan ylioppilaskokeiden derivaattaa sivuavista tehtävistä ja niiden pisteytyksistä. Tiihosen opinnäytetyön ohjaajana toimii apulaisprofessori Anne-Maria Ernvall-Hytönen Helsingin yliopiston matemaattis-luonnontieteellisen tiedekunnan matematiikan ja tilastotieteen osastolta.

Tutkimusluvan ehtona on, että tutkimuksen tekijä ei ilmaise työssään sellaisia tietoja, joiden perusteella opiskelijoiden tai koulun opettajien henkilöllisyys voisi paljastua. Tutkimukseen osallistuvien tutkijoiden tulee täyttää oheinen sitoumuslomake tutkimusaineiston käytöstä ja palauttaa se lautakunnan kansliaan. Tieteellisen työn valmistuttua pyydämme lähettämään siitä kappaleen Ylioppilastutkintolautakuntaan.

Jos työstä valmistuu verkkojulkaisu, pyydämme ilmoittamaan sen osoitteen lautakuntaan.

Tähän päätökseen saa hakea muutosta valittamalla Helsingin hallinto-oikeuteen liitteenä olevan valitusosoituksen mukaisesti (L502/2019, 23 §).

Pääsihteeri Tiina Tähkä

Suvilahdenkatu 10 B PL 50 00581 Helsinki

Söderviksgatan 10 B PB 50 00581 Helsingfors
Puhelin / Telefon 0295 338 200

Faksi / Fax
(09) 762 274

etunimi.sukunimi@ylioppilastutkinto.fi
förnamn.efternamn@ylioppilastutkinto.fi

www.ylioppilastutkinto.fi
www.studentexamen.fi

Erityisasiantuntija Virpi Britschgi

Tämä asiakirja on sähköisesti hyväksytty Ylioppilastutkintolautakunnan asianhallintajärjestelmässä.